Tinta&Pluma
Editorial

Estadística inferencial y diseño experimental para ingenieros ambientales

Jussen Paúl Facuy Delgado
Carlos Amador Sacoto
Julio César Palma Vidal
Tomás Edinson Hernández Paredes
Juan Carlos Guevara Vinza

Jussen Paúl Facuy Delgado
Universidad Agraria del Ecuador
Jussen Facuy Delgado se graduó en la Universidad Agraria del Ecuador con el Título de Ingeniero en Computación e Informática, Magister en finanzas y proyectos corporativos, Magister en Gestión Ambiental, culminó su Doctorado en Informática en la Universidad Nacional de la Plata Argentina, actualmente estudia un Doctorado en Educación en la Universidad Cesar Vallejo – Perú, es Asesor Tecnológico, Investigador y Docente Universitario: Ocupó cargos en el Sector Público: Director de Tecnología EPA, Responsable De Gestión de Tic´s - MIDUVI, Téc. Dist SITEC-MINEDU, Conferencistas de varios congresos, y es par Evaluador de Revistas indexadas, Entre sus publicaciones relevantes se encuentran los siguientes libros: Las Ciudades Inteligentes, Metodología Scrum para gestión administrativa de Scuba Eden, Herramientas Pedagógicas para un Proceso de Enseñanza Aprendizaje Innovador.

Carlos Amador Sacoto
Universidad Agraria del Ecuador
Médico Veterinario, Docente de la Universidad Agraria del Ecuador, Maestría en Ingeniería en Alimentos. Doctorado en Ciencias Ambientales y cursando Doctorado En Agricultura Sustentable, Cursos en argentina, Uruguay, España, sobre carnes y drones en la agricultura, adicional experiencia en camales, caña de azúcar (varias investigaciones). Más de 12 años de Docente Universitario. Parte de la comisión de revisión Técnica de la universidad Agraria del Ecuador

Julio César Palma Vidal
Universidad Agraria del Ecuador
Ingeniero en Ciencias Computacionales, Magister en Telecomunicaciones graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, más de 8 años prestando servicios como Integrador de Soluciones Tecnológicas, 4 años de experiencia de docencia en Instituto Superior Tecnológico Juan Bautista Aguirre, Docente Investigador en la Universidad Agraria del Ecuador

Tomás Edinson Hernández Paredes
Universidad Agraria del Ecuador
Ingeniero en Petróleo con Maestría en Ecoeficiencia Industrial por la Escuela Superior Politécnica del Litoral, de su experiencia de más de 4 años se ha desempeñado como ingeniero de proyectos en diferentes estudios ambientales de sectores estratégicos como centrales termoeléctricas, subestación eléctrica y refinerías, actualmente se desempeña como docente Universitario y consultor ambiental

Juan Carlos Guevara Vinza
Universidad Agraria del Ecuador
Docente Universitario en la especialidad de Seguridad Industrial, Higiene Industrial, Ergonomía y Psicosociología Aplicada, graduado en la Universidad de Guayaquil con el Título de Ingeniero Ambiental, Máster Universitario en Prevención de Riesgos Laborales en la Universidad Internacional de La Rioja – España, áreas afines en procesos de gestión y regularización ambiental, estudios de impacto ambiental y auditorías internas de ambiente y seguridad ocupacional.

Estadística inferencial y diseño experimental para ingenieros ambientales

Tinta&Pluma
Editorial

Estadística inferencial y diseño experimental para ingenieros ambientales

Jussen Paúl Facuy Delgado
Carlos Amador Sacoto
Julio César Palma Vidal
Tomás Edinson Hernández Paredes
Juan Carlos Guevara Vinza

Estadística inferencial y diseño experimental
para ingenieros ambientales

Autores
Jussen Paúl Facuy Delgado
Carlos Amador Sacoto
Julio César Palma Vidal
Tomás Edinson Hernández Paredes
Juan Carlos Guevara Vinza

Primera edición: Tinta&Pluma 2023
Diseño de portada: Alfredo González Bores

Tinta&Pluma 2023, Guayaquil, Ecuador, Urbanización Puerto Azul, Mz 20 Villa 12, fitogonzal@gmail.com
https://editorialtintaypluma.com/index.php/etp/index

ISBN: 978-9942-619-06-8
DOI:https://doi.org/10.53887/etp.vi

Tinta&Pluma
Editorial

Colección 2023

Cada libro de Colección Tinta & Pluma es evaluado para su publicación mediante el sistema de dictaminación doble ciego por especialistas en la materia. Lo invitamos a ver el proceso de dictaminación de este libro transparentado en nuestra plataforma.

SCAN ME

Ediciones Tinta & Pluma se especializa en la publicación de conocimiento científico en español e inglés en soporte de libro digital en las áreas de humanidades, ciencias sociales y ciencias exactas. Guía su criterio de publicación cumpliendo con las prácticas internacionales: dictaminación, comités y ética editorial, acceso abierto, medición del impacto de la publicación, difusión, distribución impresa y digital, transparencia editorial e indexación internacional.

Índice

1. DISTRIBUCIONES MUESTRALES Y TÉCNICAS DE MUESTREOS

1.1. Teorema del Límite Central

Rocha (2013) menciona que el teorema del límite central es un teorema fundamental de probabilidad y estadística, describe la distribución de la media de una muestra aleatoria proveniente de una población con varianza finita. Cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, la distribución de las medias sigue aproximadamente una distribución normal, éste se aplica independientemente de la forma de la distribución de la población.

<u>Ejemplo 1:</u>

Una fundación que se encarga de la reforestación que opera en la ciudad de Milagro tarda una media de 35 minutos en sembrar semillas de samán, con una desviación típica de 8 minutos. Supongamos que durante el día de hoy han sembrado 200 semillas de samán.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los tiempos de siembra de hoy esté entre 30 y 35 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en total, para las doscientos semillas hayan estado más de 115 horas?

Consideremos la variable $\boldsymbol{x}$= “Tiempo de siembra del samán”. Sabemos que su media es 35 minutos y su desviación típica, 8. Pero no sabemos si esta variable sigue una distribución normal. Durante el día de hoy se han sembrado $\boldsymbol{n}$=200 semillas de samán. Es decir, tenemos una muestra $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \ldots \boldsymbol{x_n}$ de nuestra variable.

Por el teorema del límite central sabemos que la media muestral se comporta como una normal de 35 y desviación típica:

$$\frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{200}}} = \mathbf{0.566}$$

Si utilizamos esta aproximación, ya podemos contestar a la pregunta a. Debemos calcular:

$$\boldsymbol{P}\ (\mathbf{30}\ \leq \boldsymbol{x}\ \leq \mathbf{35})\ \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{30-35}}{\mathbf{0,566}} \leq \frac{\mathbf{x-35}}{\mathbf{0,566}} \leq \frac{\mathbf{35-35}}{\mathbf{0,566}}\right)$$

que es aproximadamente igual a la probabilidad siguiente:

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\mathbf{30-35}}{\mathbf{0.566}} \leq \boldsymbol{Z}\ \leq \frac{\mathbf{35-35}}{\mathbf{0.566}}\right)$$

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{-8.83}\ \leq \boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0})$$

$$\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0}) - \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{8.83})$$

$$\mathbf{0.5-0}$$

$$\mathbf{0.5}$$

donde **Z** es una normal (0,1). Es decir, tenemos una probabilidad aproximada del 0.4616 de que la media del tiempo de siembra de hoy haya estado entre 30 y 35 minutos.

Por lo que respecta a la segunda pregunta, de entrada, debemos pasar las horas a minutos, ya que ésta es la unidad con la que nos viene dada la variable. Observad que 115 horas por 60 minutos nos dan 6.900 minutos. Se nos pide que calculemos la probabilidad siguiente:

$$\mathbf{P}\ \left(\mathbf{Z}\ > \frac{\mathbf{6900}}{\mathbf{200}}\right) \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{x} > \mathbf{34.5})$$

y como, que sabemos que la media se distribuye aproximadamente como una normal de media 35 y desviación típica 0.566 (supondremos siempre que la distribución de la media es normal, ya sea porque la variable de interés es normal o porque la muestra es lo bastante grande), esta probabilidad se puede aproximar por la probabilidad de una distribución normal estándar **Z**:

$$\boldsymbol{P}\left(\mathbf{Z} > \frac{\mathbf{34.5-35}}{\mathbf{2000.566}}\right)$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} > \mathbf{0.88})$$

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{Z} < \mathbf{0.88})$$

$$-\mathbf{0,1894}$$

$$\mathbf{0.8194}$$

Este teorema permite aplicar estos procedimientos útiles que a poblaciones que son considerablemente no normales; el tamaño que debe tener la muestra depende de la forma de la distribución original, si la distribución de la población es simétrica (Rocha, 2013).

1.2. Distribución Muestral de la Media

Acuna (2019) indica que si se extraen muestras aleatorias de tamaño ***n*** de una población infinita con media poblacional $\boldsymbol{\mu}$ y varianza $\boldsymbol{\sigma^2}$: La media de las medias muestrales es igual a la media poblacional $\boldsymbol{\mu_{\bar{x}}=\mu}$ y si la varianza $\boldsymbol{\sigma^2}$ de las medias muestrales es igual a la varianza poblacional dividida por ***n***. En consecuencia, la desviación estándar de las medias muestrales (llamada también el error estándar de la media muestral), es igual a la deviación estándar poblacional dividida por la raíz cuadrada de ***n***. Es decir $\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$. Si la población fuera finita de tamaño ***N***, se aplica el factor de corrección $\sqrt{\frac{\boldsymbol{N-n}}{\boldsymbol{N-1}}}$ al error estándar de la media muestral.

<u>Ejemplo 2:</u>

La duración media de las bombillas de una determinada marca sigue una distribución normal N (1500,160)

a) Si escogemos una bombilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione más de 1524 horas?

b) Si escogemos una muestra de 100 bombillas y calculamos su duración media, ¿cuál es la probabilidad de que sea superior a 1524 horas?

Apartado a:

Si escogemos sólo una bombilla, estamos teniendo en cuenta toda la población que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ N(μ,σ):

$$N(\mu, \sigma)$$

Que en nuestro caso es:

$$N(1500{,}160)$$

Nos preguntan la probabilidad de que una bombilla funcione más de 1524 horas, es decir:

$$P(x > 1{,}524)$$

Por tanto, lo primero que tenemos que hacer es tipificar la x:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Sustituyo valores y obtengo el valor de z:

$$z = \frac{1524 - 1500}{160} = 0{,}15$$

La probabilidad de durar más de 1524 horas es igual a la probabilidad de que z sea mayor que 0,15 y para poder utilizar la tabla de distribución normal, eso es igual a 1 menos la probabilidad de que z sea menor o igual a 0,15:

$$P(x > 1524) = P(z > 0{,}15) = 1 - P(z \leq 0{,}15)$$

La probabilidad de que z sea menor o igual a 0,15 la obtengo directamente de la tabla y me da:

$$P(z \leq 0{,}15) = 0{,}5596$$

Sustituyo este valor y calculo:

$$P(x > 1524) = P(z > 0{,}15) = 1 - 0{,}5596 = 0{,}4404$$

Por tanto, la probabilidad de que una bombilla funcione más de 1524 horas es de 44,04% o lo que es lo mismo el 44,04% podría durar más de 1524 horas.

Apartado b:

Si tomamos una muestra de 100 bombillas la distribución normal tiene la misma media que la población, pero la desviación típica estará dividida entre raíz de N:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = N\left(1500, \frac{160}{\sqrt{100}}\right) = N(1500{,}16)$$

Me piden cuál es la probabilidad a que la duración media de esa muestra sea superior a 1524 horas:

$$P(\bar{x} > 1524)$$

Tipificamos la media, pero teniendo en cuenta la nueva desviación típica:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

Sustituyo datos y calculo:

$$z = \frac{1524 - 1500}{16} = 1{,}5$$

La probabilidad de la media sea superior 1524 horas es igual a la probabilidad de que z sea mayor que 1,5 y para poder utilizar la tabla de distribución normal, eso es igual a 1 menos la probabilidad de que z sea menor o igual a 1,5:

$$P(\bar{x} > 1524) = P(z > 1{,}5) = 1 - P(z \leq 1{,}5)$$

Obtengo la probabilidad de que z sea menor o igual a 0,15 directamente de la tabla:

$$P(z \leq 1{,}5) = 0{,}9332$$

Sustituyo este valor y calculo:

$$P(x > 1524) = P(z > 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

Hay un 6,68% de probabilidad de que, si tomo una muestra de 100 bombillas, la media de su duración sea superior a 1 524 horas.

1.3. Distribución de la varianza

La varianza es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. Formalmente se calcula como la suma de los residuos al cuadrado divididos entre el total de observaciones. El análisis de la varianza de un factor se utiliza para comparar el valor medio de una variable dependiente cuantitativa en varios grupos, que se diferencian por los niveles del factor considerad, por lo que, los tamaños muestrales no tienen por qué ser iguales (Ordaz, Melgar y Rubio, s.f.).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$$

Dónde:

$$x: variable\ sobre\ la\ que\ se\ pretende\ calcular\ la\ varianza$$

$$x_{i:} observación\ número\ i\ de\ la\ variable\ x. i\ tomará\ valores\ entre\ 1\ y\ N.$$

$$N: número\ de\ observaciones$$

$$\bar{x}: media\ de\ la\ variable\ x$$

Ejemplo 3:

Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones de contaminación a los ríos de una población normal con varianza igual a 6, tenga una varianza muestral:

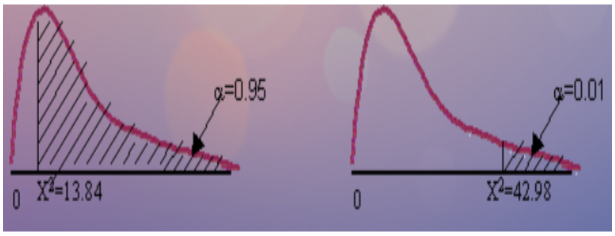
a. Mayor que 9.1
b. Entre 3.462 y 10.745

a). Al buscar este número en el reglón de 24 grados de la libertad (n-1), nos da un área a la derecha de 0.05 por lo tanto: P (S2 > 9.1) = 0,5

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1)(9.1)}{6} = 36.4$$

b). Al buscar estos calores en el reglón de 24 grados de libertad nos dan unas áreas de 0.95 y 0.01 respectivamente. Como se está pidiendo la probabilidad entre dos valores se resta (0.95-0.01) quedando 0.94 Por lo tanto la P (3.462 s2 10.745) = 0.94

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1)(3.462)}{6} = 13.847 \text{ y } X^2 = \frac{(25-1)(10.745)}{6} = 42.98$$



1.4. Técnica de muestreo probabilístico

Mantilla (2015) menciona que la Técnica de Muestreo Probabilístico es básicamente una técnica que involucra la selección de una muestra al azar de *x* frecuencia de datos para *x* investigación. Existen Técnicas de muestreo probabilístico, como el muestreo al azar, el mismo que permite al investigador hacer pocas observaciones y luego generalizarlas para una población más grande, pero si todos los miembros de la población son idénticos en todo aspecto, no existiría la necesidad de estudiar y aplicar técnicas de muestreo probabilístico.

Figura 1. Tipos de Técnicas Probabilísticas

Ejemplo 4:

Elija una muestra estratificada de tamaño **n=4** de esta población. Use la tabla de números aleatorios, en cada alternativa empiece en la fila **1** columna **1** y continúe seleccionando hacia la derecha. Indique los pasos para elegir la muestra.

Nombre Alumno	¿Trabaja?
Juan	SI
Alicia	NO
Pedro	NO
Marcos	NO
Alberto	SI
Jorge	SI
José	NO
Carlos	NO
Miguel	NO
Victoria	SI

Nombre Alumno	¿Trabaja?
María	NO
Fernanda	NO
Julio	SI
Rosa	NO
Fabián	NO
Ana	NO
Laura	NO
Enrique	NO
Carmen	SI
Marcelo	SI

Respuesta: Para elegir una muestra estratificada, primero se dividen los hombres de las mujeres y se asignan número de identificación a cada estrato:

Estrato Hombres	
Número	Nombre Alumno
1	Juan
2	Pedro
3	Marcos
4	Alberto
5	Jorge
6	José
7	Carlos
8	Miguel
9	Julio
10	Fabián
11	Enrique
12	Marcelo

Estrato Mujeres	
Número	Nombre Alumno
1	Alicia
2	Victoria
3	María
4	Fernanda
5	Rosa
6	Ana
7	Laura
8	Carmen

Usando la tabla de números aleatorios, se elige una muestra aleatoria simple de tamaño n=2 de los hombres, buscando números del 1 al 12. Se parte de la fila 1 columna 1. Se usan dos dígitos.

Tabla de números aleatorios:

columna Fila	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	37982	53402	93965	34095
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672

Los números elegidos son: 10 y 1. Por lo tanto la muestra del estrato de hombres queda constituida por Fabián y Juan. Fabián NO trabaja y Juan SI trabaja.

Usando la tabla de números aleatorios, se elige una muestra aleatoria simple de tamaño n=2 de las mujeres, buscando números del 1 al 8.

Se parte de la fila 1 columna 1. Se usa un dígito.

Tabla de números aleatorios

columna Fila	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	37982	53402	93965	34095
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672

Los números elegidos son: 1 y 4.

Por lo tanto, la muestra del estrato de mujeres queda constituida por Alicia y Fernanda. Alicia y Victoria NO trabajan.

Por lo tanto, la muestra final queda constituida por Fabián, Juan, Alicia y Fernanda.

Finalmente, la proporción de alumnos que trabaja en la muestra estratificada es de 25%.

1.5. Determinación del tamaño de la muestra

El cálculo del tamaño de la muestra es una función matemática que expresa la relación entre las variables, cantidad de participantes y poder estadístico. La muestra de un estudio debe ser una cantidad representativa de la población de interés y el objetivo principal de seleccionarla es hacer inferencias estadísticas acerca de la población de la que proviene, por lo que esta selección debe ser probabilística. Los factores estadísticos que determinan el tamaño de la muestra son: hipótesis, error alfa, error beta, poder estadístico, variabilidad, pérdidas en el estudio y el tamaño del efecto (García, Reding y López, 2013).

Ejemplo 5:

Los salarios anuales iniciales de estudiantes que acaban de terminar una carrera en Ingeniería Ambiental se espera que estén entre $30000 y $45000 suponga que quiere dar un intervalo de confianza de 95% para estimar la media poblacional de los tamaños iniciales. ¿Cuál es el valore de la desviación estándar población?

$$\text{Valor planeado } \sigma = \frac{45000 - 30000}{4} = 3{,}750$$

¿Cuán grande deberá ser la muestra? Si se quiere que el margen de error sea:

a. $500

$$\mathbf{n} = \frac{(1.96)^2 3,750^2}{500^2} = 216.09 = 217$$

b. $200

$$\mathbf{n} = \frac{(1.96)^2 3,750^2}{200^2} = 1{,}350.56 = \mathbf{1},351$$

c. $100

$$\mathbf{n} = \frac{(1.96)^2 3,750^2}{100^2} = 5{,}402.25 = \mathbf{5},4\mathbf{03}$$

d. ¿Recomendaría usted tratar de tener $100 como margen de error?

No porque la muestra es demasiado grande en comparación con la del inciso a) con la cual resultaría más fácil trabajar y además tiene el mismo nivel de confianza que la del margen de error de $100

Pruebe que la varianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional si se toma una muestra de material inorgánico de tamaño n de una población normal con media μ y varianza σ.

Sea $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$. Se tiene que probar que $E(S^2) = \sigma^2$

Primero expresamos la varianza muestral en una forma conveniente

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2\right)$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Con la definición del valor esperado

$$\mathrm{E(S^2) = E}\left[\frac{1}{\mathrm{n}-1}\left(\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x}_i^2 - \mathrm{n}\bar{\mathrm{X}}^2\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\left[\sum_{\mathrm{M}} \mathrm{E(X_i^2) - nE}\left(\bar{\mathrm{X}}^2\right)\right]$$

Cada variable X_1, proviene de la misma población con varianza ð ^{2} y media μ

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma^2 = E(X_i^2) - E^2(X_i) = E(X_i^2) - \mu^2 \Rightarrow E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

La media muestral es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2/n

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = E(\bar{X}^2) - E^2(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \mu^2 \Rightarrow E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Se sustituyen en la definición anterior con lo cual se concluye la demostración

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu - \sigma^2 - n\mu)$$
$$= \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$$

2. INFERENCIA ESTADISTICA: ESTIMACION Y CONTRASTEDE HIPOTESIS

2.1. Fundamentos de la inferencia estadística

Rodríguez (2017) establece que una inferencia estadística es una afirmación que se hace acerca de la población, en base a la información contenida en una muestra aleatoria tomada de la misma, debido a la naturaleza aleatoria de los datos obtenidos en la muestra, hay un riesgo en la certeza de la afirmación propuesta, y es necesario cuantificar el valor de este riesgo.

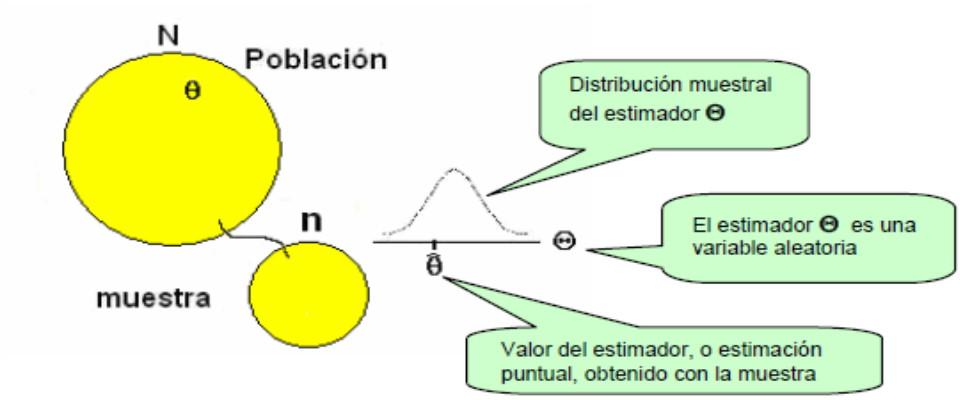
Un estimador es una variable aleatoria cuyas propiedades permiten estimar el valor del parámetro poblacional de interés. La muestra aleatoria proporciona únicamente un valor de esta variable y se denomina estimación puntual. Para estimar al parámetro poblacional, es posible definir más de un estimador, por ejemplo, para a la media poblacional μ pueden elegirse la mediana muestral X% o la media muestral X. Cada uno tiene sus propias características, por lo tanto, es necesario establecer criterios para elegirlo (Rodríguez, 2017).

Sean θ: Parámetro poblacional de interés (Ej. μ) (Valor desconocido)

Θ: Estimador (Ej. X) (Variable aleatoria) θ)

Estimación puntual de Θ (Ej. x) (Un valor del estimador)

Sean θ : Parámetro poblacional de interés (Ej. μ) (Valor desconocido)
Θ : Estimador (Ej. $\mathbf{X}$) (Variable aleatoria)
$\hat{\theta}$: Estimación puntual de Θ (Ej. $\mathbf{X}$) (Un valor del estimador)



Ejemplo 6:

En población de árboles maderables cuya distribución se desconoce se obtiene una muestra (m.a.s.) de 2000 valores de la que resulta una media de 225 y una desviación típica de 10. Suponiendo que la varianza muestral coincide con la poblacional, estimar un intervalo para la media de la población con un nivel de confianza del 95%.

Tendríamos $1 - \alpha = 0.95$ luego α=0.05; S= 10= ð; n= 2000; con x= 225

Aplicando:

$$\mu \in \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right] \Rightarrow \mu \in [224; 226]$$

Con más de 0.95 de confianza basándose en la tabla

2.2. Estimadores puntuales e intervalos

En este tema se analizan las formas adecuadas para el establecimiento del conocimiento numérico o abstracto de un parámetro de una población, y que evidentemente nos es desconocido, partiendo, claro está, de la información suministrada por la muestra (Becerra, 2019)

Becerra (2019), señala que la estimación como proceso, consiste en que dada una población que siga una distribución de cierto tipo con función de probabilidad (de cuantía o de densidad) f(X, θ) dependiente de un parámetro o varios desconocido(s) "θ", para aventurar en base a los datos muéstrales el valor que toma o puede tomar el parámetro o parámetros. UN ESTIMADOR θ (x) es una función de una muestra genérica, en la que $x=[x_1,x_2 , ,...,x_n]$, es decir, un valor estadístico que utilizaremos para estimar el valor del parámetro . Por tanto, es una variable aleatoria y será necesario para la estimación conocer la distribución muestral del estimador.

Una estimación será el valor concreto que tomará el estimador al aplicar la muestra concreta obtenida y será, por tanto, la solución concreta de nuestro problema. (Cuando no haya lugar para la confusión designaremos al estimador, a veces, como en vez de θ (x)).

La teoría de la estimación se ocupará, dentro del marco de la perspectiva clásica, de estudiar las características deseables de los estimadores permitiéndonos escoger aquel estimador que reúna más propiedades ventajosas para que realicemos buenas estimaciones, (Becerra, 2019).

2.2.1. Estimadores puntuales

Vicuña (2016) manifiesta que una estimación puntual de un parámetro poblacional es cuando se utiliza un único valor para estimar ese parámetro, es decir, se usa un punto en concreto de la muestra para estimar el valor deseado.

Cuando estimamos un parámetro de forma puntual, podemos saber con certeza, cuál es ese valor. Imaginemos una población de 30 personas de las que seleccionamos una muestra de 20 para las que conocemos sus edades. Estimar de forma puntual la media de edad, sería tan sencillo como sumar esos 20 datos y dividirlos entre el total de la muestra estadística.

Pensemos ahora en que queremos estimar la altura media de esa muestra. Al contrario que antes, no tenemos el valor de la altura de cada persona. En este caso no podríamos realizar una estimación puntual, es decir, no podríamos hallar un valor concreto de esa altura media. En este caso tendríamos que realizar una estimación por intervalos, es decir, podríamos acotar el valor más alto y bajo de las alturas de las personas con cierta seguridad o lo que en estadística se conoce como cierto nivel de confianza.

-Propiedades de los estimadores puntuales

- Insesgadez: un estimador es insesgado o centrado cuando verifica que E (θ) = θ . (Obsérvese que deberíamos usar (x), pues hablamos de estimadores y no de estimaciones, pero como no cabe la confusión, para simplificar, aquí, y en lo sucesivo lo usaremos). En caso contrario se dice que el estimador es sesgado [Se designa con B de BIAS, sesgo en inglés]. Como ejemplo podemos decir que: la media muestral es un estimador insesgado de la media de la población (y lo es sea cual fuere la distribución de la población) ya que: si el parámetro a estimar es y establecemos como estimador de tendremos que luego la media muestral es un estimador ensogado de la media poblacional. En cambio, la varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza de la población, ya que: si utilizamos como estimador de la varianza muestral, es decir: tendremos que es el parámetro a estimar. existe pues un sesgo que será Dado que la varianza muestral no es un estimador de la varianza poblacional con propiedades insesgadas , conviene establecer uno que si las tenga ; este estimador no es otro que la cuasi varianza muestral , de ahí su importancia ;así la cuasi varianza es en función de la varianza y tomada como estimador lejarza & lejarza 2 tendríamos que dado que la esperanza del estimador coincide con el parámetro a estimar podemos decir que la cuasi varianza muestral es un estimador insesgado de la varianza de la población. No obstante, y dado que, cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito el sesgo tiende a cero, se dice que el estimador es asintóticamente insesgado o asintóticamente centrado: podemos establecer que: Por tanto, la varianza muestral es un estimador sesgado pero asintóticamente insesgado de la varianza de la población.

- Consistencia: Un estimador es consistente si converge en probabilidad al parámetro a estimar.
- Linealidad: Un estimador es lineal si se obtiene por combinación lineal de los elementos de la muestra; así tendríamos que un estimador lineal:
- Eficiencia: Un estimador es eficiente u óptimo cuando posee varianza mínima o bien en términos relativos cuando presenta menor varianza que otro. Quedando claro que el hecho puede plantearse también en términos más coherentes de Error Cuadrático Medio (ECM). Tendríamos que: ECM = por lo expresado podemos aventurar un estimador insesgado, ya que luego es el único capaz de generar eficiencia. Lejarza & lejarza
- Suficiencia: Un estimador es suficiente cuando no depende del parámetro a estimar θ . En términos más simples: cuando se aprovecha toda la información muestral.

2.2.2. Estimadores con intervalos

Fernández (2018) indica que la "estimación por intervalo" consiste en determinar un par de valores a y b, tales que constituidos en intervalo [a, b]; y para una probabilidad 1-α prefijada (nivel de confianza) se verifique con relación al parámetro θ a estimar se cumpla:

$$P(\theta \in [a, b]) = 1 - \alpha$$
$$P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$$

Podemos considerar el nivel de confianza (1-α) que hemos prefijado para la expresión anterior como la probabilidad que existe (antes de tomar la muestra) de que el intervalo a construir a partir de la muestra incluya el verdadero valor del parámetro a estimar. Refleja la "confianza" en la "construcción" del intervalo y de que éste tras concretar la muestra contendrá el valor a estimar. De ahí que en términos numéricos dicho nivel o probabilidad haya de tomar un valor alto (0.9, 0.95, 0.99). Lejarza & lejarza.

Evidentemente el complementario al nivel de confianza; es decir α , nivel de significación supondrá las probabilidades de cometer el error de no dar por incluido el verdadero valor del parámetro a estimar en un intervalo en el que realmente si está. De ahí y dado que se trata de un error posible a cometer, su cuantificación en términos de probabilidad sea muy pequeña (0.1, 0.05, 0.005).

Con relación a lo anterior. Obviamente, cuanto mayor sea el nivel de confianza prefijado la amplitud del intervalo de estimación será también mayor y por tanto la estimación será menos precisa.

Existen para cualquier distribución una infinidad de intervalos a los cuales les corresponde la misma probabilidad y por tanto habrá una infinidad de intervalos, IN, que verifiquen que lógicamente nosotros buscamos una estimación lo más precisa posible; es decir ,de todos los intervalos que verifican la anterior expresión el de menor amplitud .En este sentido, es sencillo ver que si la distribución es simétrica y unimodal ,de todos los intervalos isoprobables, el de menor amplitud (que coincidirá con el de mayor densidad media de probabilidad) es el intervalo centrado en la media .De acuerdo con esto ,si la distribución que consideramos es simétrica la determinación del intervalo de estimación es relativamente sencilla.

La construcción de intervalos específicos depende de las características de la población (normal o no,etc.) ,de los parámetros o combinaciones de parámetros a los que se les construye (media , varianza , proporción , coeficiente de correlación , diferencias de medias , ….) , tamaño muestral y parámetros poblacionales conocidos . De ello se deduce que según dichas circunstancias la construcción de intervalos variará, si bien es cierto que el patrón de trabajo para su construcción permanece invariable, (Fernández, 2018).

2.3. Intervalos de confianza para proporciones

Rubio (2017 expresa que cuando tenemos una variable dicotómica (o de Bernoulli) a menudo interesa saber en qué proporción de casos, p ocurre el éxito en la realización de un experimento. También nos puede interesar comparar la diferencia existente entre las proporciones en distintas poblaciones. Si queremos estimar el parámetro p, la manera más natural de hacerlo consiste en definir la suma de estas, lo que nos proporciona que la distribución del número de éxitos es una distribución Binomial. Recordad que la distribución Binomial podía ser aproximada a la Normal cuando el tamaño de la muestra n es grande, y p no es una cantidad muy cercana a cero o uno2.

$$X \sim B(n,p) = X\tilde{\imath}\mathrm{N}(np, npq)$$

Tomamos como estimación de p la proporción de éxitos obtenidos en las n pruebas p ˆ.

El error estándar para de la proporción (EEP) es:

$$EEP = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Para encontrar el intervalo de confianza a nivel de confianza (1-α) para p se considera el intervalo que hace que la distribución de Z~N (0, 1) deje la probabilidad α fuera del mismo. Como ya hemos visto, se considera el intervalo cuyos extremos son los cuantiles α/2 y 1 − α/2. Así se puede afirmar con una confianza de 1 −α que:

$$p = \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

<u>Ejemplo 7:</u>

En una muestra de 40 sujetos extraída al azar de una determinada población hay 24 fumadores que contaminan el aire. Estimar la proporción de fumadores de la población con una confianza del 95%.

Solución:

Estimación puntual: $\hat{p} = \frac{24}{40} = 0.6(60\%)$

1-α = 0.95 entonces α = 0.05, α/2 = 0.025, zα/2 = 1.96

Error estándar: $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{40}} = 0.0775$

I.C 95% de p: $\hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.60 \pm 1.96 \times 0.0775 = 0.60 \pm 0.152$

I.C al 95%: $(0.448{,}0.752)$

Interpretación: Con una confianza del 95% la proporción de fumadores en la población se sitúa entre 0.448 y 0.752.

La confianza del 95% consiste en poder afirmar que, si repitiésemos la estimación 100 veces, el intervalo que hemos obtenido sería uno de los 95 que de hecho contendrían la proporción de individuos que fuman en la población. Confiamos en qué esté sea uno de los 95 intervalos de cada 100 que incluyen a la proporción poblacional y no sea uno de los 5 intervalos de cada 100 que no la incluyen.

2.4. Intervalos de confianza para varianzas

Molina y Lara (2016) mencionan que el intervalo de confianza para la media de una variable continua con el valor de la varianza de dicha variable conocida en toda la población es el intervalo menos usual. Para estimar la media poblacional μ de una población Normal de media μ (desconocida) y de varianza σ^2 (conocida), *N* (μ, σ^2), se selecciona una muestra aleatoria x_1, x_2, ..., x_n; de tamaño n de valores de una variable aleatoria de esta población y se calcula su media muestral, como mejor estimador puntual de μ. La construcción del intervalo de confianza se hace tomando como base este estimador. Para calcular un intervalo de confianza para μ partimos de la variable aleatoria.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que sigue una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Buscamos los cuantiles de esta distribución tales que

$$P\left[-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

O, equivalentemente,

$$P\left[X - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq X + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza que debemos calcular es

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejemplo 8:

Para estimar la dispersión del peso de una piedra en un lugar se toma una muestra de 15 piedras y se observan los siguientes resultados (en gramos).

62, 57, 70,58,59,67,65, 55, 57, 60,54, 72, 66 y 77

Con un coeficiente de confianza de 95% construye un IC para la varianza de las piedras de aquel lugar.

Datos:

Grados de libertad:

n - 1 =15 -1 = 1

Varianza muestral:

S^2 = 51.19223

Coeficiente de confianza

95%

Sustitución:

$$\frac{|14|51.19223}{17.1169} < \sigma^2 < \frac{|14|51.19223}{10{,}1653}$$

Resultado:

$$41.8703 < \sigma^2 < 70.5036$$

2.5. Fundamentos de prueba de hipótesis

INEC (2019) explica que se puede obtener una primera intuición para saber si una diferencia es estadísticamente significativa, o no, al revisar si los intervalos de confianza de los estimadores que se están comparando se traslapan o no; sin embargo, esto no es evidencia suficiente y se requiere de una prueba formal de significancia estadística en base a la información muestral: las pruebas de hipótesis, porque cuando se trata de tomar una decisión sobre la población, se hacen suposiciones sobre la misma, éstas suposiciones, que pueden ser ciertas o no, se les denomina hipótesis estadísticas. Las dos hipótesis que se plantean y que se deben verificar son:

- Hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$): esta hipótesis se plantea con la finalidad de anularla. Es una afirmación que no se rechaza a menos que los datos muestrales proporcionen evidencia suficiente para decir que es falsa.
- Hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$): se refiere a cualquier hipótesis que difiera de la nula. Es una afirmación que se acepta si los datos muestrales proporcionan evidencia suficiente de que la hipótesis nula es falsa. Se le conoce también como la hipótesis de investigación.

2.6. Prueba de hipótesis con métodos paramétricos

Cornejo (2019) señala que cuando se analizan datos medidos por una variable cuantitativa continua" las pruebas de hipostasis estadísticas de estimación y contraste recientemente empleadas se basan en suponer que se ha obtenido una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad de tipo normal o de gauss, en muchas ocasiones esta suposición no resulta valida" y en otras la sospecha de que no sea adecuada no resulta de comprobada por contraste de muestras pequeñas. Tratase de muestras pequeñas, en estos casos disponemos de n estos casos disponemos de dos posibles mecanismo dos posibles mecanismos: Los datos se pueden trasformar de tal manera que sigan una distribución normal. , Bien se puede acudir a pruebas estadísticas que no se !asan en ninguna suposición en ninguna suposición en cuanto a la distribución de probabilidad a partir de la que fueron obtenidos los datos" y por ello se denominan pruebas no paramétricas distribución mientras que las pruebas que suponen una distribución de probabilidad determinada para los datos se denominan determinada para los datos se denominan pruebas paramétricas.

Las pruebas paramétricas asumen distribuciones estadísticas subyacentes a los datos. Por tanto, deben cumplirse algunas condiciones de validez, de modo que el resultado de la prueba paramétrica sea fiable. Por ejemplo, la prueba t de Student para dos muestras independientes será fiable solo si cada muestra se ajusta a una distribución normal y si las varianzas son homogéneas (Cornejo, 2019).

- **Condiciones que deben cumplir las pruebas paramétricas**

Cornejo (2019) indica que en una prueba paramétrica debe cumplir con los siguientes elementos:

-Normalidad: El análisis y observaciones que se obtienen de las muestras deben considerarse normales. Para esto se deben realizar pruebas de bondad de ajuste donde se describe que tan adaptadas se encuentran las observaciones y cómo discrepan de los valores esperados.

-Homocedasticidad: Los grupos deben presentar variables uniformes, es decir, que sean homogéneas.

-Errores: Los errores que se presenten deben de ser independientes. Esto solo sucede cuando los sujetos son asignados de forma aleatoria y se distribuyen de forma normal dentro del grupo...

- Tipos de pruebas paramétricas:

-Prueba del valor Z de la distribución normal

-Prueba T de Student para datos relacionados (muestras dependientes)

-Prueba T de Student para datos no relacionados (muestras independientes)

-Prueba T de Student-Welch para dos muestras independientes con varianzas no homogéneas

-Prueba de Ji Cuadrada de Bartlett para demostrar la homogeneidad de varianzas

-Prueba F (análisis de varianza o ANOVA).

- Ventajas y desventajas de las pruebas paramétricas

Algunas de las ventajas de las pruebas paramétricas son:

-Son más eficientes.

-Son perceptibles a las características de la información obtenida.

-Los errores son muy poco probables-

Los cálculos probabilísticos son muy exactos

Las desventajas de las pruebas paramétricas son:

Los cálculos son difíciles de realizar

Los datos que se pueden observar son limitados

<u>Ejercicio 9:</u>

Los siguientes datos son los tiempos que tardan dos grupos. De estudiantes (enfermería y medicina) para responder un examen de microbiología ambiental sobre bacterias en el cuerpo humano.

Estudiantes	Tiempo minino				
Enfermeria	100	84	96	107	89
Medicina	79	163	95	132	91

¿Las muestras son dependientes o independientes?

b) Pruebe que el tiempo de duración promedio para responder el examen de los estudiantes de medicina es mayor que el grupo de los estudiantes de medicina enfermería. Rta: Empleando la prueba de hipótesis para diferencia de dedos medias poblacionales -Muestras de independientes

Estadístico de trabajo

En Excel, en la pestaña Datos, la opción Análisis de datos. En el listado de la ventana desplegada elige la opción Prueba t Para dos muestras suponiendo varianzas desiguales. Empleamos P (t) de una sola cola. P=0,1715

Decisión: Como P>0,05 entonces afirmo que con esos datos no puedo tomar ninguna decisión

2.7. Prueba de hipótesis con métodos no paramétricos

Zambrano (2015) señala que las pruebas no paramétricas no deben ajustarse a ninguna distribución. Pueden por tanto aplicarse incluso aunque no se cumplan las condiciones de validez paramétricas.

Las pruebas no paramétricas, también conocidas como pruebas de distribución libre, son las que se basan en determinadas hipótesis, pero lo datos observados no tienen una organización normal. Generalmente, las pruebas no paramétricas contienen resultados estadísticos que provienen de su ordenación, lo que las vuelve más fáciles de comprender. Las pruebas no paramétricas tienen algunas limitaciones, entre ellas se encuentra que no son lo suficientemente fuertes cuando se cumple una hipótesis normal. Esto puede provocar que no sea rechazada, aunque sea falsa. Otra de sus limitaciones es que necesitan que la hipótesis se cambie cuando la prueba no corresponde a la pregunta del procedimiento si la muestra no es proporcional (Zambrano, 2015).

- Algunas de las características de las pruebas no paramétricas son:

Es un método de medición difícil de aplicar.

Es necesario realizar pruebas de hipótesis.

Las hipótesis son estrictas.

Las observaciones deben de ser independientes.

Quizá te interese también conocer sobre las pruebas paramétricas.

- Tipos de pruebas no paramétricas y sus aplicaciones

-Los tipos de pruebas no paramétricas son:

-Prueba de signos de una muestra

-Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

-Prueba U de Mann-Whitney

-Prueba de Kruskal-Wallis

-Prueba de la mediana de Mood

-Prueba de Friedman

- Ventajas de las pruebas no paramétricas

Las ventajas de las pruebas no paramétricas son:

-Pueden utilizarse en diferentes situaciones, ya que no deben de cumplir con parámetros estrictos.

-Generalmente, sus métodos son más sencillos, lo que las hace más fácil de entender.

-Se pueden aplicar en datos no numéricos.

<u>Ejemplo 10:</u>

Los siguientes datos son las edades de una muestra de personas ecologistas

Seleccionadas entre los visitantes de una reserva natural.

32, 23, 64, 31, 74, 44, 61, 33, 66, 73,

27, 65, 40, 54, 23, 43, 58, 87, 58, 62.

68, 89, 93, 24, 73, 42, 33, 63, 36, 48,

77, 75, 37, 59, 70, 61, 43, 68, 54, 29,

48, 81, 57, 97, 35, 58, 56, 58, 57, 45

Realiza un test Chi-cuadrado de bondad de ajuste para decidir si puede

Aceptarse que las edades sigan una distribución normal.

Solución

Ordenamos los datos de menor a mayor y realizamos una tabla de frecuencias

Con 4 clases.

Clase	[20,40)	[40,60)	[60,80)	[80, 100)	Total
Frecuencia	12	18	15	5	50

Tenemos que hallar una estimación para la media y la desviación típica. Usamos en esta ocasión la media y la desviación típica de la muestra como estimadores. Para realizar los cálculos, y con el propósito de simplificarlos se han empleado la tabla de datos agrupados en lugar de los datos primitivos, resultando:

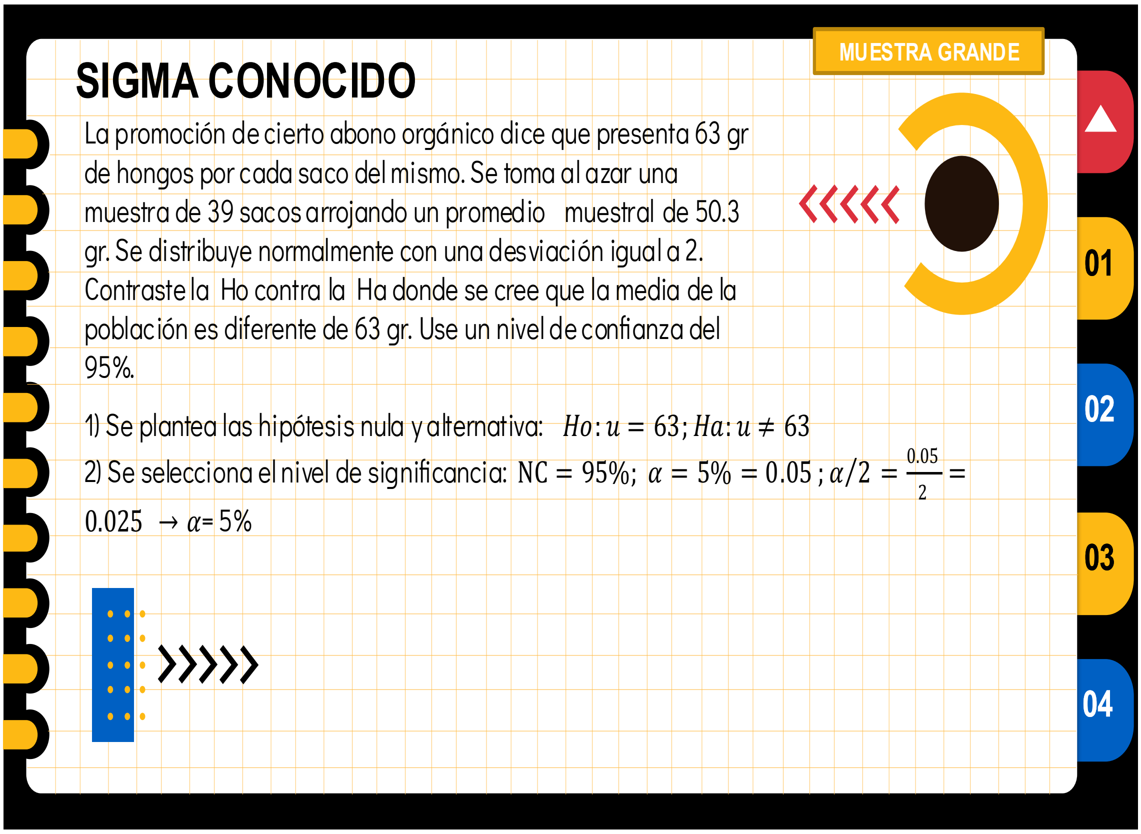
$\mu = \bar{x} = 55.2$, $\hat{\sigma} = S = 18.7$

Calculamos ahora la probabilidad para cada clase usando la distribución N (55.2, 18.7). La probabilidad que correspondería a las distintas clases si se cumple la hipótesis nula de que los datos siguen una distribución N(55.2, 18.7) es: $P(x \leq 40)$ = NormalDist(40; 55.2, 18.7) = 0.208 16 $P(40 < x \leq 60)$ = NormalDist(60; 55.2, 18.7)−NormalDist(40; 55.2, 18.7) = 0.601 29 − 0.208 16 = 0.393 13 $P(60 < x \leq 80)$ = NormalDist(80; 55.2, 18.7)−NormalDist(60; 55.2, 18.7) = 0.907 61 − 0.601 29 = 0.306 32 $P(80 < x)$ = 1 − NormalDist(80; 55.2, 18.7) = 9.2386×10^{-2} Multiplicamos por el número total de datos estas probabilidades para obtener la frecuencia esperada.

Clase	(-∞,40]	(40,60]	(60,80]	(80,-∞]	Total
n_i	12	18	15	5	50
p_i	0.21	0.39	0.31	0.09	1
np_i	10.5	19. 66	15. 32	4. 5	50

Hallando el valor crítico que corresponde a χ^2 4−2−1,0.95 = ChiSquareInv (0.95; 1) = 3. 84, resulta que el intervalo de aceptación es (0,3.84). Como el valor experimental, 0.41669, pertenece a este intervalo se decide aceptar que los datos siguen una distribución N (55.2, 18.7).

COMPENDIO



3) Se identifica el estadístico de prueba:

$$1 - 0.025 = 0.9750 \rightarrow \pm 1.96$$

4) Se formula la regla de decisión
¿Cuándo se rechaza Ho?
Si Zc es $\geq o \leq al\ valor\ critico$

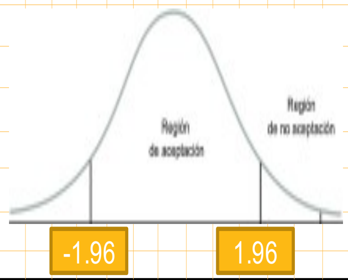
5) Se toma una muestra y se decide: se acepta Ho o se rechaza

$$Zc = \frac{\bar{x} - \mu o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{50.4 - 63}{\frac{4}{\sqrt{39}}} = -19.67$$

Se rechaza la Ho porque Zc es < al valor critico negativo

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846



SIGMA CONOCIDO

MUESTRA PEQUEÑA

Dentro de un área forestada con 175 *Pinus halpensis* (pino carrasco), se determina que este árbol tiene capacidad de absorber 350 mg de CO_2, para verificar esta premisa se toma una muestra de 25 arboles, en donde se reflejan los siguientes resultados (Observar tabla), y presentan una desviación de: 84.37 mg de CO_2. Pruebe la hipótesis del promedio teorico igual a 225 mg de CO_2 en contraposición a la hipótesis alternativa que es menor a 350 mg de CO_2 en un nivel de significancia del 7%.

139.54	112.89	254.32	237.09	167.78
120.05	287.98	300.00	333.89	350
243.65	299.00	341.10	319.87	236.42
132.67	143.34	350	189.32	260
178.56	131.78	121.54	310.05	101.54

1) Se plantea las hipótesis nula y alternativa: $Ho: u = 350; Ha: u \neq 350$

2) Se selecciona el nivel de significancia: $NC = 93\%;\ \alpha = 7\% = 0.07;\ \alpha/2 = \frac{0.07}{2} = 0.035$

3) Se identifica el estadístico de prueba: $1 - 0.035 = 0.965 \rightarrow \pm 1.815$

z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255
0.4	.6554	.6591	.6628
0.5	.6915	.6950	.6985
0.6	.7257	.7291	.7324
0.7	.7580	.7611	.7642
0.8	.7881	.7910	.7939
0.9	.8159	.8186	.8212
1.0	.8413	.8438	.8461
1.1	.8643	.8665	.8686
1.2	.8849	.8869	.8888
1.3	.9032	.9049	.9066
1.4	.9192	.9207	.9222
1.5	.9332	.9345	.9357
1.6	.9452	.9463	.9474
1.7	.9554	.9564	.9573
1.8	.9641	.9649	.9656

4) Se formula la regla de decisión

¿Cuándo se rechaza Ho?

Si Zc es $\geq o\ \leq al\ valor\ critico$

5) Se toma una muestra y se decide: se acepta Ho o se rechaza

$$Zc = \frac{\bar{x} - \mu o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{226.49 - 350}{\frac{84.37}{\sqrt{25}}} = -7.31$$

-1.81   1.81

Se acepta la Ho porque Zc se encuentra dentro de la región de aceptación.

01 02 03 04

SIGMA DESCONOCIDO

MUESTRA GRANDE

Se pretende clasificar a las empresas agrónomas que cuiden el bienestar de sus empleados otorgando los equipos de bioseguridad necesario para no exponerlos al covid-19, en base a una evaluación ejercida por consultores con un nivel de confianza del 90%, los mismos que otorgan certificados de seguridad laboral, la empresa Agriamigos después de 17 evaluaciones continuas obtuvo un promedio de 7.5 y una media muestral de $\bar{x} = 8.54$ y una desviación estándar muestral de $s = 2.89$. Según estos datos, la empresa Agriamigos ¿debería ser certificado por otorgar una seguridad laboral estándar?

1) Se plantea las hipótesis nula y alternativa: $Ho: u = 7.5; Ha: u \neq 7.5$

2) Se selecciona el nivel de significancia: $NC = 90\%;\ \alpha = 10\% = 0.1;\ \alpha/2 = \frac{0.1}{2} = 0.05$

n= 17

n-1=16

01 02 03 04

3) Se identifica el estadístico de prueba: $0.05 \rightarrow \pm 2.120$

gl	ÁREA DE DOS COLAS 0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	0,0001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	6366,198
2	1,886	2,920	4,303	6,695	9,925	31,598	99,992
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	28,000
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	15,544
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	11,178
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	9,082
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	7,885
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	7,120
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	6,594
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	6,211
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	5,921
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	5,694
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	5,513
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	5,363
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	5,239
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	5,134

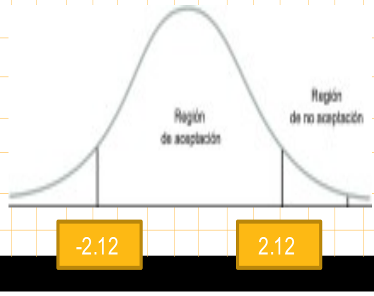
4) Se formula la regla de decisión
¿Cuándo se rechaza Ho?
Si Zc es $\geq o \leq al\ valor\ critico$

5) Se toma una muestra y se decide: se acepta Ho o se rechaza

$$tp = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{8.54 - 7.5}{\frac{2.89}{\sqrt{17}}}$$

$$= 1.48$$

Se acepta la Ho porque Zc se encuentra dentro de la región de aceptación.



SIGMA DESCONOCIDO

MUESTRA PEQUEÑA

Un ingeniero agrónomo quiere demostrar que el uso de fungicidas que contiene polvo de semillas de mostaza es capaz cubrir un promedio de 289 metros cuadrados de una finca por galón, esto debido a su concentración, basado en un nivel de confianza del 96% dando un nivel de significancia de 0.02, se realizo una demostración con 14 fungicidas que contienen polvo de semillas de mostaza de diferentes concentraciones para observar su rendimiento, dando como resultado los siguientes datos:

235.65	288.87	278.56	243.54	287.32	289	288.90
199.78	289	289	287.45	278.89	256.98	233.53

1) Se plantea las hipótesis nula y alternativa: $Ho: u = 289; Ha: u \neq 289$

n= 14
n-1=13

2) Se selecciona el nivel de significancia: $NC = 96\%;\ \propto = 4\% = 0.04; \frac{\propto}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$

3) Se identifica el estadístico de prueba:

$0.02 \rightarrow \pm 2.650$

4) Se formula la regla de decisión

¿Cuándo se rechaza Ho?

Si Zc es $\geq o \leq al\ valor\ critico$

gl	ÁREA DE DOS COLAS 0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	0,0001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	6366,198
2	1,886	2,920	4,303	6,695	9,925	31,598	99,992
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	28,000
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	15,544
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	11,178
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	9,082
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	7,885
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	7,120
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	6,594
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	6,211
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	5,921
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	5,694
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	5,513
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	5,363
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	5,239
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	5,134

5) Se toma una muestra y se decide: se acepta Ho o se rechaza

$$tp = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{267.60 - 289}{\frac{28.80}{\sqrt{14}}} = -2.78$$

Se rechaza la Ho porque Zc se encuentra fuera de la región de aceptación.

MUESTRA GRANDE

PROPORCIONES

Un consultor ambiental considera que el 17% de la población del cantón la libertad prefiere emplear bolsas reutilizables. Si 11 de 60 habitantes eligen las bolsas reutilizables sobre las bolsas de papel o de plástico, ¿Que podríamos concluir acerca de la afirmación del consultor usando un nivel de confianza del 92%?

1) Se plantea las hipótesis nula y alternativa:

$Ho: po = 17\%; Ha: \neq 17\%$

2) Se selecciona el nivel de significancia:

$NC = 92\%;\ \propto = 8\% = 0.08; \frac{\propto}{2} = \frac{0.08}{2} =$

$0.04 \rightarrow 1 - 0.04 = 0.96 \rightarrow \pm 1.755$

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846

3) Hallar los valores de P

$$P = \frac{x}{n} = \frac{11}{60} = 0.18$$

01
02
03
04

4) Hallar los valores críticos o de prueba

$$Vc: Zc = 1.755$$

$$p: Zp = 52.58$$

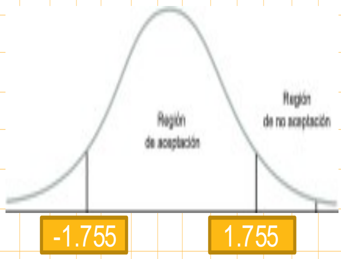
$$Zp = \frac{P - Po}{\sqrt{(\frac{PoQo}{n})}}$$

$$Zp = \frac{0.18 - 0.17}{\sqrt{(\frac{0.17 * 0.83}{60})}}$$

$$Zp = 0.20$$

5) Decisión: Apruebo la hipótesis nula.

6) Conclusión: El consultor tiene la razón, en vista de que la proposición se encuentra dentro del área de aceptación.



01
02
03
04

MUESTRA PEQUEÑA

PROPORCIONES

En un conversatorio en una escuela publica un docente afirmo que el 68% de los estudiantes de ultimo año conocen sobre el reciclaje y los beneficios del mismo, al evaluarlos y en base a los resultados se afirmo que 120 de 250 estudiantes tienes bases del reciclaje. ¿ en base a esto y con una significancia del 3% que podríamos afirmar?

1) Se plantea las hipótesis nula y alternativa:

$$Ho: po = 68\%; Ha: \neq 68\%$$

2) Se selecciona el nivel de significancia:

$$NC = 97\%;\ \propto = 3\% = 0.03; \frac{\propto}{2} = \frac{0.03}{2} =$$

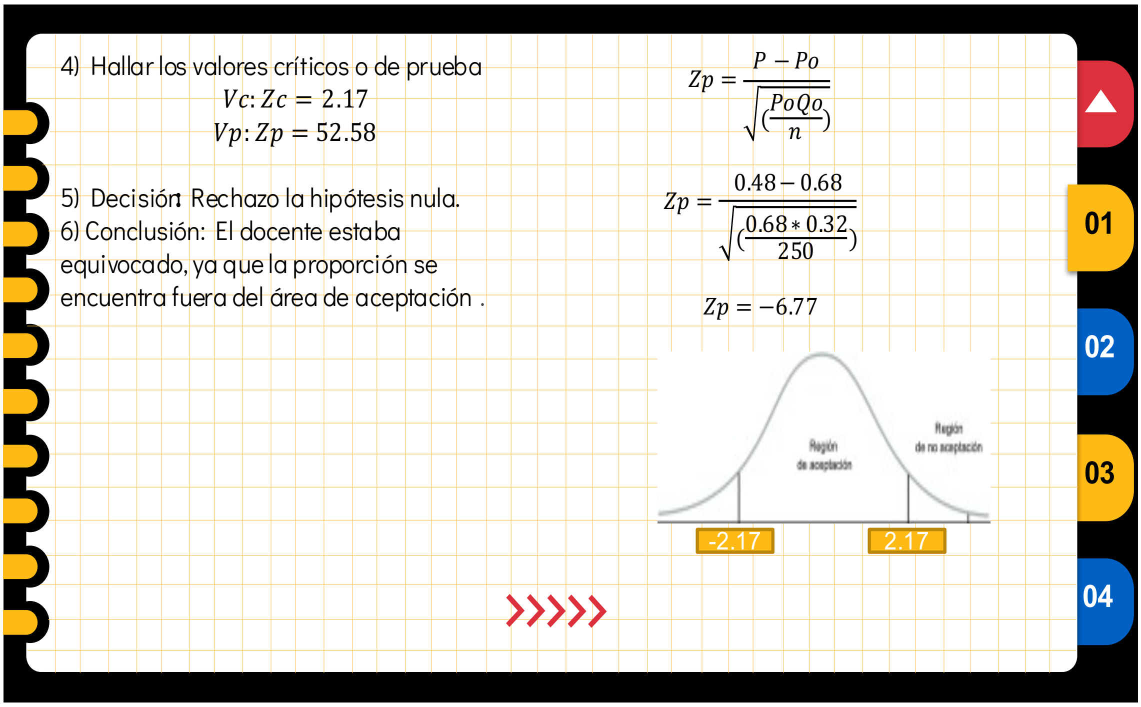
$$0.015 \rightarrow 1 - 0.015 = 0.985 \rightarrow \pm 2.17$$

3) Hallar los valores de P

$$P = \frac{x}{n} = \frac{250}{120} = 0.48$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911

01
02
03
04



3. INFERENCIA ESTADISTICA: REGRESION LINEAL

3.1. Introducción a la regresión lineal

Cárdenas, Cardona, Gonzales, Rivera y Cárdenas (2013) mencionan que en muchas investigaciones estadísticas tendientes a la toma de decisiones de tipo profesional o personal uno de los objetivos principales es establecer relaciones que permitan pronosticar una o más variables en términos de otras. El procedimiento estadístico que se utiliza para este fin se conoce como análisis de regresión, el que permite establecer la relación funcional o ecuación matemática que relaciona las variables, así como la fuerza de esa relación.

Existen cuatro posibles formas en que las variables se pueden relacionar: relación lineal directa, relación lineal inversa, relación no lineal directa y relación no lineal inversa, cuya estructura formal y funcional permite dilucidar con objetividad las actividades orientadas a decidir qué ecuación se debe emplear (Cardona, 2013).

Ejemplo 11:

Hemos usado una regresión lineal para encontrar los parámetros de la línea que minimiza el error de los datos que tenemos. El proceso de aprendizaje consiste en estimar los parámetros w y b. Así nos queda que, para estos datos, los mejores valores son:

a= 0.0918 b = 1.2859

y = 0.0918x + 1.2859

Podemos usar este modelo de regresión lineal para estimar cuáles serán los resultados para otros valores de x. Por ejemplo, si queremos saber el resultado para x = 5, usaremos el modelo anterior y veremos que el resultado es 1.7449:

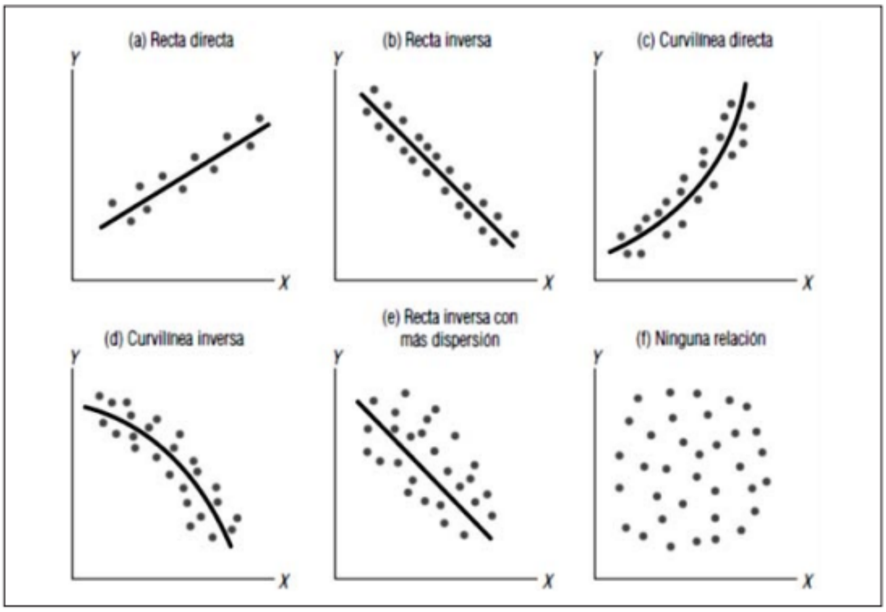
y = 0.0918 (5) + 1.2859

1.7449y = 0.0918 (5)+1.2859

1.7449

3.1.1. Regresión lineal simple

El atender problemas relacionados con los sistemas de representación funcional y el comportamiento de las variables demanda el estar familiarizado con cada uno de los casos, y que apropiadamente se explican para orientar al lector en el proceso del cálculo de la línea de regresión, precisándose en primera instancia revisar el concepto de función lineal, para luego abordar con propiedad el modelo de regresión lineal simple, debiéndose considerar la ecuación estimada y el método de los mínimos cuadrados (Gutiérrez y De la Vara, 2005).



Gutiérrez y De la Vara (2005) mencionan que dos variables, sean ***x*** y ***y,*** suponga que se quiere explicar el comportamiento de *y* con base en los valores que toma *x*. Para esto, se mide el valor de *y* sobre un conjunto de *n* valores de *x*, con lo que se obtienen *n* parejas de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (xn, yn). A *y* se le llama la variable dependiente o la variable de respuesta y a *x* se le conoce como variable independiente o variable regresora; la variable *x* no necesariamente es aleatoria, ya que en muchas ocasiones el investigador fija sus valores; en cambio, *y* sí es una variable aleatoria. Una manera de estudiar el comportamiento de *y* con respecto a *x* es mediante un modelo de regresión que consiste en ajustar un modelo matemático de la forma:

$$y = f(x)$$

3.2. Estimadores por mínimos cuadrados

IPNM (2010) manifiesta a los estimadores por mínimos cuadrados como el procedimiento más utilizado por adaptar una recta a un conjunto de puntos, y dicha recta resultante presenta 2 característica importantes:

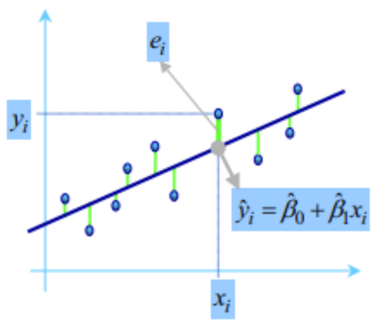
• Es nula la suma de desviaciones verticales en los puntos a partir de la recta.

• Es mínima la suma de los cuadrados de dichas desviaciones, para un valor dado de ***x***, por ejemplo, x_1, habrá una diferencia entre el valor y_1 y el correspondiente valor de la curva ***C***. Esta diferencia se denota por D_1, que se conoce como desviación, error o residuo.

<u>Ejemplo 12:</u>

El método de mínimos cuadrados para obtener los valores β_0 y β_1 que mejor se ajustan a los datos: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$. El método consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los datos y las estimaciones, es decir, minimizar la suma de los residuos al cuadrado.

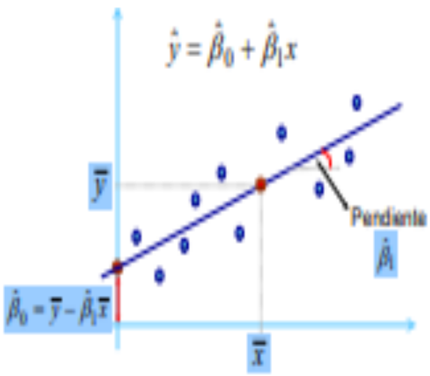
$$\sum_{t=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=t}^{n} (yi - yi)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(yi - (\beta_0 + \beta_1\, xi)\right)^2$$



El resultado que se obtiene es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$



3.3. Inferencias acerca de los modelos de regresión

Moral (2006) establece que para entender en qué consiste un modelo de regresión, así como para interpretar correctamente los resultados debemos relacionar dos conceptos: el coeficiente de correlación y el análisis de la varianza. Se puede demostrar que existe una relación entre el coeficiente de correlación (***r***) y el análisis de la varianza de la regresión, de tal forma que el cuadrado de ***r***, llamado coeficiente de determinación, multiplicado por 100 se interpreta como el porcentaje de la varianza de la variable dependiente que queda explicada por el modelo de regresión.

Las variables a introducir en un modelo de regresión permiten que las variables utilizadas para poder estimar el modelo (variables independientes) puedan ser de cualquier tipo, no existen restricciones sobre ellas. Únicamente se deben tener en cuenta una serie de consideraciones (Moral, 2006).

3.4. Elección del modelo de regresión y predicción

Pérez (2014) califica a la modelización estadística más sencilla como la expresión de la variable dependiente a través de sus variables predictoras, es decir mediante una ecuación lineal de la forma: $y = B_0 + B_1 x_1 + \dots B_n x_k$. El caso más simple para una única variable sería una recta $y = mx + ny = mx + n$ y recibirá el nombre de regresión lineal simple. Cuando $k > k_1 > 1$ la llamaremos regresión múltiple. Así, el proceso consistiría en ajustar la recta a nuestro conjunto de datos y crear una expresión matemática que permita predecir, de forma aproximada, el valor de la variable dependiente en un individuo cuando se conoce el valor de una variable predictora (regresión simple) o varias variables predictoras (regresión múltiple) en ese mismo individuo. A la ecuación que representa esta relación se le llama modelo de regresión (Pérez, 2014).

<u>Ejemplo 13:</u>

Las estimaciones de mínimos cuadrados en este caso vienen dadas por fórmulas simples:

Los estadísticos descriptivos anteriores para las variables AcTot y AcLib (acidez total y acidez libre) son los siguientes: La recta de regresión ajustada es la siguiente: ***y x*** = + 4 469 0 990, donde ***y*** es la acidez total y ***x*** es la acidez libre.

$$\bar{x} = 37.998, \bar{y} = 33.8727$$
$$S_X^2 = 90.786, S_Y^2 = 85.459$$
$$S_X = 9.5282 S_Y = 9.24439$$

La recta de regresión ajustada es la siguiente:

yx= + 4 469 990

Dónde:

y: es la acidez total

x: es la acidez libre:

$$a = \bar{x} - b\bar{y}, \qquad b = \frac{S_{XY}}{S_Y^2}$$

3.5. De varianza

En estadística, el análisis de la varianza (ANOVA por sus sigloides en inglés, ANalysis Of VAriance) es una colección de modelos estadísticos y sus procedimientos asociados, en el cual la varianza está particionada en ciertos componentes debidos a diferentes variables explicativas. Se utiliza de forma intensiva en el análisis y diseño de experimentos para evaluar el efecto de tratamientos en la variabilidad de la variable respuesta (De La Fuente, 2019).

SALUD MADRID (2018) manifiesta que el anova permite distinguir dos modelos para la hipótesis alternativa:

- Modelo I o de efectos fijos en el que la H_1 supone que las k muestras son muestras de k poblaciones distintas y fijas.
- Modelo II o de efectos aleatorios en el que se supone que las ***k*** muestras, se han seleccionado aleatoriamente de un conjunto de ***m***>***k*** poblaciones.

<u>Ejemplo 14:</u>

Modelo I de ANOVA es el ejemplo 1, porque en él se asume que existen cinco poblaciones (sin tratamiento, con poca sal, sin sal, etc.) fijas, de las que se han extraído las muestras.

Modelo II sería: un investigador está interesado en determinar el contenido, y sus variaciones, de grasas en las células hepáticas de cobayas; toma del animalario 5 cobayas al azar y les realiza, a cada una, 3 biopsias hepáticas.

La manera más sencilla de distinguir entre ambos modelos es pensar que, si se repitiera el estudio un tiempo después, en un modelo I las muestras serían iguales (no los individuos que las forman) es decir corresponderían a la misma situación, mientras que en un modelo II las muestras serían distintas.

Aunque las asunciones iniciales y los propósitos de ambos modelos son diferentes, los cálculos y las pruebas de significación son los mismos y sólo difieren en la interpretación y en algunas pruebas de hipótesis suplementarias.

4. DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIO

El diseño completamente al azar es una prueba basada en el análisis de varianza, en donde la varianza total se descompone en la "varianza de los tratamientos" y la "varianza del error". El objetivo es determinar si existe una diferencia significativa entre los tratamientos, para lo cual se compara si la "varianza del tratamiento" contra la "varianza del error" y se determina si la primera es lo suficientemente alta según la distribución F.

4.1. Características del diseño

Se definen los t tratamientos que se van a aplicar a las n unidades experimentales, de tal forma que a r unidades experimentales les va a corresponder un tipo de tratamiento. Las unidades experimentales se sortean para la asignación a cada tratamiento. Se define la variable a medir (Melbos, 2016).

4.2. Modelo estadístico y análisis de varianza

Acción

1. Se definen los tratamientos y se sortean las unidades experimentales. Se realiza el experimento y se recopilan los datos. Suponiendo que son tres tratamientos y cuatro repeticiones, y que se midió el crecimiento de ciertas plantas, los resultados se acomodan en una tabla.

Ejemplo

	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4
Trat 1	13	12	13	11
Trat 2	11	14	13	12
Trat 3	9	8	11	9
			Total	136

$y_{..}$

y_{32} valor del tratamiento 3 repetición 2

2. Se suman todos los valores de las unidades experimentales. A ese valor se le llamará y. Se obtiene el cuadrado de todos los valores de las unidades experimentales y luego se suman, a ese valor se le llamará Σ yij 2

	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4
Trat 1	169	144	169	121
Trat 2	121	196	169	144
Trat 3	81	64	121	81
			Total	1580

3. Se calcula la suma de cuadrados del total con la fórmula: Suma Cuadrados total = Σ yij 2 - (y..)2 / n Donde n es el total de los datos

Suma de cuadrados total =

$1580 - (136)^2 / 12 = 38.6$

4. Es necesario encontrar la varianza entre los tratamientos. Primero se obtiene la suma de cada uno de los tratamientos (que se llamarán yi .). Cada suma de

tratamientos se eleva al cuadrado, luego el resultado de cada tratamiento se divide entre el número de repeticiones de ese tratamiento, en este caso todos los tratamientos tienen 4 repeticiones, y finalmente se suman los valores, el resultado se denomina Σ yi . 2 /ni

	$y_{i.}$	$(y_{i.})^2$	$(y_{i.})^2/n_i$
Trat 1	49	2401	600.25
Trat 2	50	2500	625
Trat 3	37	1369	342.25
		suma	1567.5

$\Sigma\, y_{i\cdot}^2/n_i$

5. Se calcula la suma de cuadrados de los tratamientos con la fórmula: Suma Cuadrados de tratamientos = Σ yi . 2/ni - (y..)2 / n (Piqueiro, 2012).

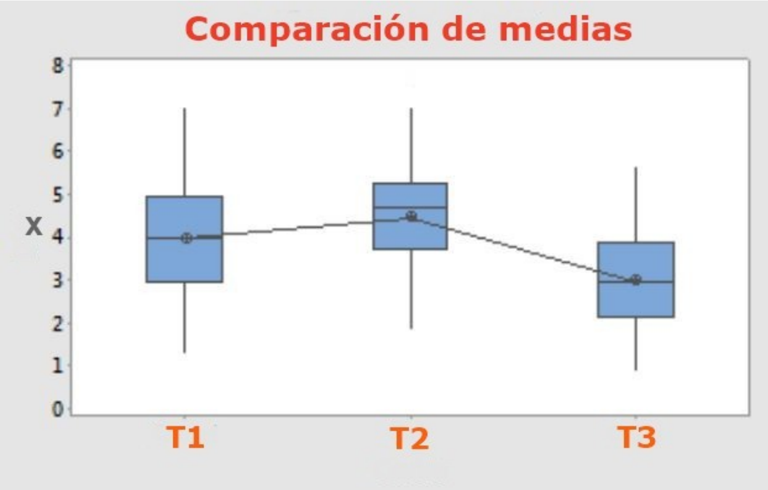
Suma de cuadrados de tratamientos

$= 1567.5 – (136)^2 / 12 = 26.16$

4.2.1. Prueba de Tukey

La prueba de Tukey es un método que tiene como fin comparar las medias individuales provenientes de un análisis de varianza de varias muestras sometidas a tratamientos distintos.

El test, presentado en el año 1949 por John.W. Tukey, permite discernir si los resultados obtenidos son significativamente diferentes o no. Se le conoce también como la prueba de diferencia honestamente significativa de Tukey (Tukey’s HSD test por sus siglas. en inglés).



En los experimentos donde se compara entre tres o más tratamientos diferentes aplicados a igual número de muestras, se requiere discernir si los resultados son significativamente distintos o no.

Se dice que un experimento es balanceado cuando el tamaño de todas las muestras estadísticas es igual en cada tratamiento. Cuando el tamaño de las muestras es diferente para cada tratamiento, se tiene entonces un experimento no balanceado.

En ocasiones no es suficiente con un análisis de varianza (ANOVA) para saber si en la comparativa de diferentes tratamientos (o experimentos) aplicada a varias muestras cumplen la hipótesis nula (Ho: "todos los tratamientos son iguales") o por el contrario se cumple la hipótesis alternativa (Ha: "por lo menos uno de los tratamientos es diferente").

La prueba de Tukey no es única, existiendo muchas más pruebas para comparar medias muestrales, pero esta es una de la más conocidas y aplicadas *(Castillo , 2017).*

4.2.1.1. Comparador y Tabla de Tukey

En la aplicación de esta prueba se calcula un valor w llamado el comparador de Tukey cuya definición es como sigue:

w = q √ (MSE /r)

Donde el factor q se obtiene de una tabla (Tabla de Tukey), que consta de filas de valores q para diferente número de tratamientos o experimentos. Las columnas indican el valor de factor q para diferentes grados de libertad. Normalmente las tablas disponibles tienen significancias relativas de 0.05 y 0.01.

Tabla de valores críticos de Tukey

$q_{\alpha}(v_1, v_2)$

v_2 ↓	α ↓	v_1: 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.05	18.00	29.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59
	0.01	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2
2	0.05	6.10	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39
	0.01	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59
3	0.05	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72
	0.01	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13
4	0.05	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.34	7.60	7.83	8.03
	0.01	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57
5	0.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
	0.01	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	0.05	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65
	0.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	0.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
	0.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	0.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05
	0.01	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03

En esta fórmula, dentro de la raíz cuadrada aparece el factor MSE (Cuadrado Medio del Error) divido entre r, que indica el número de repeticiones. El MSE es un número que se obtiene normalmente a partir de un análisis de varianzas (ANOVA).

... continuación de la tabla de Tukey

9	**0.05**	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87
	0.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65
10	**0.05**	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
	0.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	**0.05**	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61
	0.01	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	**0.05**	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51
	0.01	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	**0.05**	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
	0.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	**0.05**	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
	0.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	**0.05**	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
	0.01	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	**0.05**	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
	0.01	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46

Cuando la diferencia entre dos valores medios sobrepasa al valor *w* (comparador de Tukey), entonces se concluye que se trata de promedios diferentes, pero si la diferencia es menor que el número de Tukey, entonces se trata de dos muestras con valor promedio estadísticamente idéntico (Pérez R. , 2016).

Al número w se le conoce también como número HSD (Diferencia Honestamente Significativa).

Este único número comparador puede aplicarse si el número de las muestras aplicadas para la prueba de cada tratamiento es igual en cada uno de ellos.

4.2.1.2. Experimentos Desbalanceados

Cuando por algún motivo el tamaño de las muestras es diferente en cada tratamiento a comparar, entonces el procedimiento descrito anteriormente difiere ligeramente y se conoce como prueba de Tukey-Kramer.

Ahora se obtiene un número w comparador para cada par de tratamientos i, j:

$w(i,j) = q \sqrt{(½ \, MSE /(ri + rj))}$

En esta fórmula, el factor q se obtiene de la tabla de Tukey. Dicho factor q depende del número de tratamientos y los grados de libertad del error. r_i es el número de repeticiones en el tratamiento i, mientras que r_j es el número de repeticiones en el tratamiento j.

El análisis de varianza es una técnica para análisis de datos, donde se prueba la hipótesis nula que “todos los tratamientos son iguales, contra la hipótesis alternativa que “al menos uno de los tratamientos es distinto a los demás”.

Lamentablemente, el objetivo deseado al realizar el experimento (encontrar el o los mejores tratamientos), no se puede cumplir. Para ello es necesario realizar un procedimiento adicional, llamado Prueba de medias.

Existe una gran cantidad de pruebas de medias, pero quizá la más conocida es la prueba de Tukey. Esta prueba fue desarrollada por John W. Tukey.

Se calcula un valor llamado el comparador de Tukey, de la siguiente manera:

$$w = q \times \sqrt{\frac{CME}{r}}$$

Donde:

q es un valor que se obtiene de una tabla (Tabla de Tukey), de manera parecida a la tabla de F. Horizontalmente se coloca el número de los tratamientos y verticalmente los Grados de libertad del error. Solamente existen tablas para niveles de significancia del 5% y del 1%.

El término que está dentro de la raíz cuadrada se llama error estándar de la media y es igual al cuadrado medio del error (obtenido en el ANDEVA), dividido entre el número de repeticiones.

Si la diferencia entre dos promedios es mayor que el comparador, se concluye que los dos promedios no son iguales, en caso contrario se concluye que sí son iguales.

Se utiliza el mismo comparador para todos los pares de promedios que se comparan.

Pero esta fórmula solamente es válida para el caso de experimentos con igual número de repeticiones (balanceado).

Un experimento puede ser desbalanceado (desiguales repeticiones) por varios motivos: por causa de los tratamientos, por fallas en el manejo del experimento, o por causas desconocidas que el experimentador no pudo controlar. El análisis de un experimento desbalanceado se complica.

En el caso del diseño al completo azar el procedimiento es directo, pero en el de bloques al azar, cuadrado latino y otros, es necesario estimar los datos faltantes antes de realizar el análisis (Manfredo Reyes, 2014).

Lo mismo sucede para la prueba de Tukey. No se puede usar un solo comparador, se deben calcular varios comparadores para realizar la comparación por pares. Esta variante de la prueba se conoce como Tukey-Kramer

La fórmula para el cálculo es la siguiente:

$$W_{ij} = q \times \sqrt{\frac{CME}{2}\left[\frac{1}{r_i + r_j}\right]}$$

Donde:

W ij= comparador para el par de tratamientos i, j

q= valor de la tabla de Tukey, con el número de tratamientos y grados de libertad del error

CME= cuadrado medio del error

ri, rj son las repeticiones de los tratamientos i, j

Diferencia honestamente significativa: HSD= qr (CME dentro de grupos/ n) 0,5 (18)

Esta prueba no es apropiada cuando existen grandes diferencias en el tamaño de la muestra por tratamiento. A continuación, se presenta el resultado del análisis realizado con InfoStat para los datos del archivo anova_cuadro1.cvs.

Test:Tukey Alfa=0.05 DMS=2.65568

Error: 12.1789 gl: 57

Tratamiento	Medias	n	E.E.		
FQ	33.42	20	0.78	A	
FO	32.31	20	0.78	A	B
Testigo	30.34	20	0.78		B

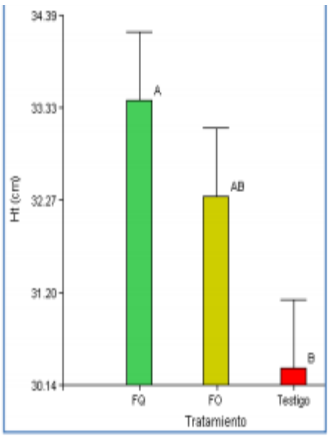
Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p<= 0.05)

Test:Tukey Alfa=0.01 DMS=3.34849

Error: 12.1789 gl: 57

Tratamiento	Medias	n	E.E.	
FQ	33.42	20	0.78	A
FO	32.31	20	0.78	A
Testigo	30.34	20	0.78	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p<= 0.01)



4.3. Prueba de los Rangos Múltiples de Duncan

En estadística , la nueva prueba de rango múltiple (MRT, por sus siglas en inglés) de Duncan es un procedimiento de comparación múltiple desarrollado por David B. Duncan en 1955. El MRT de Duncan pertenece a la clase general de procedimientos de comparación múltiple que utilizan la estadística de rango estudiado *q r* para comparar conjuntos de medias.

David B. Duncan desarrolló esta prueba como una modificación del método Student – Newman – Keuls que tendría mayor poder. El MRT de Duncan es especialmente protector contra errores falsos negativos (Tipo II) a expensas de tener un mayor riesgo de cometer errores falsos positivos (Tipo I) . La prueba de Duncan se usa comúnmente en agronomía y otras investigaciones agrícolas.

El resultado de la prueba es un conjunto de subconjuntos de medias, donde en cada subconjunto se ha encontrado que los medios no son significativamente diferentes entre sí (Pérez L. , 2013).

4.3.1. Test de Duncan

Al aplicar análisis de varianza (ANOVA) y determinar que existe una diferencia estadísticamente significativa, normalmente surge la pregunta acerca de cuáles pares de medias son diferentes.

Para ello se utilizan las llamadas "Pruebas de Comparación Múltiple".

El Test de Duncan o Prueba de Rangos Múltiples de Duncan permite comparar las medias de los “t niveles” de un factor después de haber utilizado ANOVA.

Aunque se puede aplicar sin que ANOVA haya arrojado significancia, lo lógico es aplicarla a partir de ese resultado, para determinar a qué se deben las diferencias encontradas (Aldanalisis, 2019).

Consiste en calcular varios "rangos", denominados comúnmente “rangos significativos mínimos”, según la siguiente fórmula:

$$D_{p} = d_{\alpha\; k-gl\; error}\sqrt{\frac{CM_{error}}{n}}$$

Donde:

p: toma valores entre 2 y k (siendo k el número de tratamientos).

k: es el número de tratamientos.

d: se obtiene de la tabla T-9

CM: se obtiene de la tabla ANDEVA (ANOVA)

Este Test, permite comparar tratamientos no relacionados, es decir, todos los tratamientos contra todos, a fin de establecer un orden de méritos.

Es más preciso cuando el número de mediciones de cada grupo es igual.

Cabe señalar que no es recomendable su uso cuando la cantidad de tratamientos a comparar es muy alta (Kay , 2014).

PRUEBA DE LA DIFERENCIA MÍNIMA SIGNIFICATIVA (DMS)

Esta prueba de medias se emplea para comparar los distintos pares de medias de un conjunto de t tratamientos basándose en el calculó de un valor crítico (DMS) para juzgar las diferencias entre cualquier par de medias de los tratamientos. El valor de la DMS se obtiene multiplicando el valor de la tabla de T de Student:

$$\boxed{DMS(\alpha) = t(\alpha; e\,g.\,l.)\sqrt{\frac{2CME}{r}}}$$

$DMS\ \alpha$ **=** Diferencia Mínima Significativa a un nivel α

$t\ \alpha;\ e\ g.\ l.$ **=** Valor de la Distribución T de Student para un nivel de significancia α**,** **con** $e\ g.\ l.$**=** grados de libertad del error.

CME = Cuadrado medio del Error

r = Número de repeticiones

Procedimiento

1) Obtener los valores absolutos de las diferencias entre los pares de tratamientos $Yi - Yj$

2) Comparar $Yi - Yj$ vs el valor de DMS (α)

3) Si $Yi - Yj$ > DMS (α) se declara significativa la diferencia observada entre las medias de los tratamientos Yi y Yj.

4) Se unen con letras o líneas a aquellas medias de tratamientos que no difieren entre significativamente entre sí.

Nota: Para realizar la prueba de manera más ágil, se recomienda obtener la matriz de diferencias entre todos los posibles pares de tratamientos, ordenándolos previamente de mayor a menor magnitud de y menor a mayor magnitud y separar con letras o líneas a las medias que no difieran entre sí. (Rueda, 2015)

Ejemplo Numérico

Se condujo una investigación con la finalidad de evaluar el comportamiento de 8 cultivares silvestres de Dalia. Los tratamientos (genotipos) fueron distribuidos de acuerdo con un diseño experimental completamente aleatorizado con tres repeticiones, habiéndose obtenido los siguientes resultados del análisis de varianza para la variable diámetro de capitulo en cm:

					F(7, 24 gl)	
F.V.	g.l.	S.C.	CM	F	0.05	0.01
Tratamientos	7	33.134	4.733	3.94**	2.42	3.50
Error	24	28.865	1.203			
Total	31	61.999				

Medidas de tratamientos	
Genotipo	Diámetro de capitulo (cm)
G1	4.88
G2	5.20
G3	7.53

G4	7.78
G5	6.18
G6	7.58
G7	6.43
G8	6.40

El valor de la DMS a un nivel de significancia del 0.05 sería:

$$\boldsymbol{DMS(0.05) = t(0.05; 24\, g.l.)\sqrt{\frac{2(1.203)}{3}}}$$

$$\boldsymbol{DMS(0.05) = (1.711)(1.69)}$$

$$\boldsymbol{DMS(0.05) = 1.33\ cm}$$

El valor de t (0.05; 24 gl.) se puede encontrar en la Tabla del Apéndice A1.

Comparación entre todas las medias de los tratamientos

							d	d	d
					c	c	c	c	
			b	b	b	b			
		a	a	a					
		G4	G6	G3	G7	G8	G5	G2	G1
		7.78	7.58	7.53	6.43	6.40	6.18	5.20	4.88
G1	4.88	2.90*	2.70*	2.65*	1.55*	1.53*	1.30ns	0.33ns	
G2	5.20	2.58*	2.38*	2.33*	1.23ns	1.20ns	0.98ns		
G5	6.18	1.60*	1.40*	1.35*	0.25ns	0.23ns			
G8	6.40	1.38*	1.18ns	1.13ns	0.02ns				
G7	6.43	1.35*	1.15ns	1.10ns					
G3	7.53	0.25ns	0.05ns						
G6	7.58	0.20ns							
G4	7.78								

$$\boldsymbol{DMS(0.05) = 1.33\ cm}$$

*=Diferencia Significativa al 0.05, ns = diferencia no significativa

Genotipo	Diámetro de capitulo (cm)

G1	4.88	d
G2	5.20	cd
G3	7.53	ab
G4	7.78	a
G5	6.18	cd
G6	7.58	ab
G7	6.43	bc
G8	6.40	bc

Las medias con la misma letra no difieren significativamente entre sí. DMS (0,05)

Conclusiones:

La prueba de la DMS al 0.05 indica que el genotipo 4 mostró el diámetro de capitulo mayor, superando significativamente a la mayoría de los genotipos restantes (excepto a los genotipos 3 y 7). El genotipo 1 presentó el menor diámetro de capitulo, aunque no difirió significativamente de los genotipos 2 y 5, los cuales a su vez no difirieron de los genotipos 5, 7 y 8. (Andramuño, 2014)

DISEÑO DE BLOQUES COMPLETOS AL AZAR: DBCA

Reyes (2014), menciona que es conocido como diseño de doble vía, se aplica cuando el material es heterogéneo. las unidades experimentales homogéneas se agrupan formando grupos homogéneos llamados bloques.

Tratamientos A, B, C, D, E

Bloque I: B A E C D

Bloque II: C B D E A

Bloque III: B E A D C

Bloque IV: D C A E B

Las fuentes de variación para el análisis estadístico son:

Fuentes Grados de libertad

Tratamiento (t-1) = 4

Bloques (r-1) = 3

Error (t-1) (r-1) =12

Características:

1. Las unidades experimentales son heterogéneas.

2. Las unidades homogéneas están agrupadas formando los bloques.

3. En cada bloque se tiene un número de unidades igual al número de tratamientos (bloques completos)

4. Los tratamientos están distribuidos al azar en cada bloque.

5. El número de repeticiones es igual al número de bloques.

MODELO

Cada observación del experimento es expresada mediante una ecuación lineal en los parámetros, el conjunto conforma el modelo para el diseño de bloques completos al azar

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,...,t \\ j=1,2,...,r \end{array}$$

μ = Parámetro, efecto medio

τ_i = Parámetro, efecto del tratamiento I

β_j = Parámetro, efecto del bloque j

ε_{ij} = valor aleatorio, error experimental de la u.e. i,j

Yij = Observación en la unidad experimental

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS por Mínimos cuadrados del error

$$\Sigma\,\hat{\tau}_i = 0 ; \ \Sigma\,\hat{\beta}_j = 0$$

$$\hat{\mu} = \overline{Y}_{..}$$
$$\hat{\tau}_i = \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$$
$$\hat{\beta}_j = \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}$$

El error en cada unidad experimental puede ser encontrado por diferencia:

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..}$$

SUMAS DE CUADRADOS

$$\text{SC total} = \Sigma\Sigma(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = \Sigma\Sigma Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$\text{SC trat.} = \Sigma\Sigma(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \Sigma\frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$\text{SC bloque} = \sum\sum(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum \frac{Y^2_{.j}}{t} - \frac{Y^2_{..}}{rt}$$

$$\text{SC error} = \sum\sum\varepsilon^2_{ij} = \sum\sum Y^2_{ij} - \sum_i \frac{Y^2_{i.}}{r} - \sum_j \frac{Y^2_{.j}}{t} + \frac{Y^2_{..}}{rt}$$

$\frac{Y^2_{..}}{rt}$ es el termino de corrección (TC) de las sumas de cuadrados, en las expresiones de sumas de cuadrados se acostumbra colocar sólo TC, por ejemplo:

$$\text{SC TOTAL} = \sum\sum Y^2_{ij} - TC$$

APLICACIÓN: Estudio de Variedades forrajeras en Camote.

Se realizo un ensayo de 4 nuevas variedades forrajeras (V1, V2, V3 y V4) frente a una variedad ya conocida. Se dispuso a realizar el ensayo en la época de verano en Selva. Cada parcela de 10 m2 con un total de 15 parcelas. Se formaron bloques de 5 parcelas homogéneas.

Se midió el peso fresco y seco y se registró el peso en kilos.

	Follaje Fresco					
	V1	Testigo	V2	V3	V4	Y.j
I	17.9	7.0	19.8	15.2	12.7	72.6
II	20.8	5.9	16.7	21.0	14.2	78.6
III	21.4	4.2	16.7	8.8	11.5	62.6
Yi.	60.1	17.1	53.2	45.0	38.4	213.8

El objetivo es comparar las nuevas variedades entre ellas y con el testigo.

CALCULO DE SUMAS DE CUADRADOS

Termino de corrección = TC = $(213.8)^2/15$

$$SC\_Variedades = \frac{(17.1)^2 + \ldots + (38.4)^2}{3} - TC$$

$$SC\_Bloques = \frac{(72.6)^2 + \ldots + (62.6)^2}{5} - TC$$

$$SC\_Total = (17.9)^2 + \ldots + (38.4)^2 - TC$$

SC_error Exp. = SC_total - (SC_Variedades + SC_Bloques)
Resultados del ANVA:

Variable: Follaje

Fuente	Gl	SC	CM	Fc	Pr > F
bloque	2	26.1333	13.0666	1.51	0.2785
variedad	4	364.0440	91.0110	10.49	0.0029
Error	8	69.4000	8.6750		
Corrected Total	14	459.5773			

CV = 20.6 %
Promedio = 14.25

$F_{0.05}$ (4,8) = 3.84
$F_{0.01}$ (4,8) = 7.01

Comparación de grupos mediante contrastes.

Contrastes ortogonales

Contraste 1: Testigo vs V1, V2, V3, V4

Contraste 2: V1, V2 vs V3, V4

Contrate 3: V1 vs V2

Contrate 4: V3 vs V4

	V1	Testigo	V2	V3	V4	$(\sum_i c_{ki} Y_{i.})^2$	$r \sum_i c_{ki}^2$	SC
C1	-1	4	-1	-1	-1	16460.89	60	274.3
C2	-1	0	-1	1	1	894.01	12	74.5
C3	-1	0	1	0	0	47.61	6	7.9
C4	0	0	0	-1	1	43.56	6	7.2
Yi.	60.1	17.1	53.2	45.0	38.4			364.0

Mediante estos contrastes, se hace las comparaciones, por ejemplo, C1 significa probar el testigo vs los demás, C2 significa comparar las variedades “1" y “2” frente a "3" y “4”, El análisis se realizará mediante el ANVA.

Fuentes	Gl	SC	CM	Fc	F0.05	F0.01
C1	1	274.34	274.3	31.6 **	5.32	11.26
C2	1	74.5	74.5	8.6 *		
C3	1	7.94	7.94	0.9 ns		
C4	1	7.26	7.26	0.8 ns		
Error	8	69.4	8.675			

Prueba de Friedman’s para dos vías de clasificación:

Friedman (1937) propuso una prueba para datos sin distribución conocida, cuando estos corresponden a un diseño de bloques completos al azar.

1. Asignar un valor de jerarquía (Rango) a la respuesta de los tratamientos dentro de cada bloque de menor a mayor.

2. Obtener la suma de los rangos para cada tratamiento.

3. Probar la hipótesis nula de que las poblaciones dentro de un bloque son idénticas contra la opción que al menos un tratamiento viene de una población que tiene una diferente ubicación. El criterio es:

Sin empates:

$$\chi^2 cal = \frac{12}{bt(t+1)} \sum_i r_{i.}^2 - 3b(t+1)$$

los valore 12 y 3 no dependen del tamaño del experimento.

con empates:

Hallar previamente los valores para el ajuste:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{t} r_{ij}^2 \qquad C_1 = bt(k+1)^2/4$$

Valor de Chi-cuadrada para la prueba

$$\chi^2 cal = \frac{(t-1)}{A_1 - C_1} \left[\sum_{i=1}^{t} r_{i.}^2 - b\,C_1 \right]$$

con t-1 grados de libertad.

t = número de tratamientos

b = número de bloques

Se acepta la hipótesis planteada si el valor de Chi-cuadrada calculada es menor que el valor tabular con (t-1) grados de libertad.

Comparaciones múltiples.

Las comparaciones se realizan con la suma de los rangos de cada tratamiento.

Si “Ri “representa la suma de los rangos del tratamiento “i” que es ri.

Entonces la diferencia es significativa si:

$$\left|R_i - R_j\right| > LSD = t_{\alpha(b-1)(t-1)}\sqrt{\frac{2(b\,A_1 - \sum R_i^2)}{(b-1)(t-1)}}$$

con t-1 grados de libertad.

Ejemplo:

Bloques	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	4.4	3.3	4.4	6.8	6.3	6.4
2	5.9	1.9	4	6.6	4.9	7.3
3	6	4.9	4.5	7	5.9	7.7
4	4.1	7.1	3.1	6.4	7.1	6.7

Valores de los rangos

Bloques	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	2.5	1	2.5	6	4	5
2	4	1	2	5	3	6
3	4	2	1	5	3	6
4	2	5.5	1	3	5.5	4
	12.5	9.5	6.5	19	15.5	21

Chi-Cuadrado = (12/(4*6*7))*(12.5^2 + ... + 15.5^2) – 3(4)7 = 11.07
Chi Tabular (5 gl) 0.05 = 11.1

```
Grupos, Tratamientos y Suma de rangos
a         V1            13
ab        V2            12
ab        V3            10
 bc       V4            7
  c       Testigo       3
```

Se observa una similitud respectó a la prueba paramétrica.

Manualmente con el Excel seria:

Datos experimentales:

bloque	V1	Testigo	V2	V3	V4
1	17.9	7	19.8	15.2	12.7
2	20.8	5.9	16.7	21	14.2
3	21.4	4.2	16.7	8.8	11.5

Rangos por bloque:

	V1	Testigo	V2	V3	V4
bloque1	4	1	5	3	2
bloque2	4	1	3	5	2
bloque3	5	1	4	2	3
Ri	13	3	12	10	7

Resultados estadisticos:

A	SUMSQ(B19:F21)	165
Sum(R²i)	SUMSQ(B22:F22)	471
t0.05(8)	TINV(0.05,8)	2.306
LSD	C26*SQRT(2*(3*C24-C25)/8)	5.649

Ejercicio: Realice la prueba de Friedman para los siguientes datos:

Utilice metodo sin empates.

Datos observados

Bloques	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	4.4	3.3	4.4	6.8	6.3	6.4
2	5.9	1.9	4	6.6	4.9	7.3
3	6	4.9	4.5	7	5.9	7.7
4	4.1	7.1	3.1	6.4	7.1	6.7

Valores de los rangos

Bloques	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	2.5	1	2.5	6	4	5
2	4	1	2	5	3	6
3	4	2	1	5	3	6
4	2	5.5	1	3	5.5	4
	12.5	9.5	6.5	19	15.5	21

Chi-Cuadrado = $(12/(4*6*7))*(12.5^2 + ... + 15.5^2) - 3(4)7 = 11.07$
Chi Tabular (5 gl) 0.05 = 11.1

A	363
Sum(R²i)	1331
t0.05(15)	2.131451
LSD	8.561254

5. DISEÑO COMPLETAMENTE AL AZAR

Fuente: Bustos, 2017

(Martinez, 2017) Detalla que el diseño completamente al azar es una prueba basada en el análisis de varianza, en donde la varianza total se descompone en la "varianza de los tratamientos" y la "varianza del error". El objetivo es determinar si existe una diferencia significativa entre los tratamientos, para lo cual se compara si la "varianza del tratamiento" contra la "varianza del error" y se determina si la primera es lo suficientemente alta según la distribución F.

Este diseño tiene amplia aplicación cuando las unidades experimentales son muy homogéneas, es decir, la mayoría de los factores actúan por igual entre las unidades experimentales. Esta situación se presenta en los experimentos de laboratorio donde casi todos los factores están controlados. También en ensayos clínicos y en experimentos industriales y en ensayos de invernaderos es muy útil ya que ha sido ampliamente utilizado en experimentos agrícolas.

Características:

Se definen como los t tratamientos que se van a aplicar a las n unidades experimentales, de tal forma que a r unidades experimentales les va a corresponder un tipo de tratamiento.

Las unidades experimentales se sortean para la asignación a cada tratamiento.

Se define la variable a medir.

Ventajas:

Cuando en un experimento las unidades experimentales se arreglan bajo un Diseño completamente al azar se tienen las siguientes ventajas:

1. **Flexibilidad:** Cualquier número de tratamientos y cualquier número de réplicas pueden ser usadas, siempre y cuando se tengan suficientes UE homogéneas.
2. **Análisis Estadístico simple:** el análisis estadístico es simple ya sea cuando todos los tratamientos tengan igual número de réplicas (balanceado), diferente número de réplicas (desbalanceado) o pérdida de datos, caso en el cual se trata como un análisis desbalanceado.
3. **Máximo número de grados de libertad para el error**: Esto ocurre porque el diseño tiene solo dos fuentes de variación que son los tratamientos y el error y los grados de libertad para este error están dados por la expresión $t(r-1)$.
4. **Precisión:** Es muy preciso si se tienen en cuenta UE homogéneas

Desventajas

(Maestre, 2016) Analiza que se puede obtener baja precisión cuando las unidades experimentales no sean muy homogéneas y así ser ineficiente.

Usos

1. Es recomendado cuando es posible que gran parte de las UE no respondan al tratamiento o puedan perderse durante el experimento.

2. Es útil en experimentos en los que el número de UE es limitado, ya que provee el máximo número de grados de libertad del error.

Hipótesis de un diseño completamente al azar

(Yepez, 2014) Menciona que en un diseño completamente al azar, la hipótesis nula es que los efectos de tratamientos (β) son todos iguales, lo que se expresa por:

H0: β1 = β2 = β2.

La hipótesis alterna es que hay al menos un efecto de tratamiento que es diferente a los demás. Para probar la hipótesis, en la tabla ANVA se comparan los cuadrados medios de tratamientos respecto a los cuadrados medios del error, los primeros deben ser suficiente mayores que los segundos. Debido a que los cuadrados medios se distribuyen ji-cuadrada, al dividir dos variables con distribución ji-cuadrada se obtiene una variable con una distribución F (Fisher). Es por esto que la división de los cuadrados medios de tratamientos entre cuadrados medios del error se le llama «F calculada», y se puede ubicar en esta distribución Fc. El nivel de significancia es de 0.05 (95% de seguridad), es decir, que se tiene que identificar el punto (F tabular con nivel de significancia de 0.05), cuya área a la derecha sea de 0.05; si Fc logra ser mayor que Ft entonces es cuando se rechaza la H0.

Modelo para desiguales unidades por tratamiento

Parra (2013), describe que en algunas ocasiones no se cuenta con el suficiente material para realizar el experimento, así que algunos tratamientos pueden quedar sin algunas repeticiones, o bien, en el transcurso del experimento se pierden unidades por enfermedad o por mal manejo, en tal caso se usa el modelo de desiguales unidades por tratamiento.

Presentación de Datos

Al arreglar el material experimental de manera aleatoria utilizando un procedimiento de aleatorización para el caso de un experimento con 15 UE y 3 tratamientos y cinco réplicas por tratamiento usted puede obtener por ejemplo el siguiente arreglo.

Tratamiento		
2	1	3
01	08	15
05	06	02
09	07	04
11	12	10
14	03	13

Al ejecutar el experimento se supone que usted En este momento de la realización del experimento se debe decidir cual tratamiento se aplica primero y a que UE, siempre que sea posible. Por ello se recomienda al experimentador que con fines de asegurar la independencia de los errores se debe aleatorizar la manera de aplicar los tratamientos a las UE, seleccionando aleatoriamente números aleatorios entre 01 y 15 y el orden en que queden estos números decidirá cual UE será la primera en tratar. Suponga que se obtuvo el siguiente orden: 05, 02, 07, 08, 15, 03,12, 13, 01, 04, 11, 14, 06, 09, 10. Entonces usted debe tratar primero la UE rotulada con el número 05, luego la rotulada con el número 02 y así sucesivamente ha estandarizado la técnica de medición, ha calibrado el instrumento, el examinador ha realizado su calibración inter-examinador (para determinar su exactitud con respecto a un Gold estándar) e intra-examinador (tomando varias veces la misma para evaluar su precisión en la medida). Las pruebas estadísticas utilizadas para validar la calibración del examinador dependen de la escala en que es medida la variable, si la variable es categórica de escala nominal u ordinal se puede utilizar entre otros el coeficiente de concordancia Kappa, si la variable es continua se utilizar entre otros, el coeficiente de variación, el coeficiente de correlación concordancia de Lin.

Recuerde que la teoría estadística no arregla datos originados de mediciones erróneas y que la calibración de equipos y examinadores es una de las condiciones para validar los resultados de su investigación.

Diseño Completamente al Azar Desbalanceado

Algunas veces es posible que el número de réplicas de cada tratamiento sea diferente y así cada tratamiento tendrá r_i réplicas $(i = 1, 2, 3, \ldots, t)$. Estos diseños se pueden presentar en el caso que se esté comparando un control contra otros tratamientos ya que queremos obtener buena información acerca del control, por ello este tendrá más replicaciones que los otros tratamientos. Otro caso en el que suele presentarse es cuando entre los t tratamientos algunos son más importantes que otros. Otra razón es cuando la observación de alguna UE por algún motivo se pierde. El modelo sobre el cual se basa el análisis está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, t\,; j = 1, 2, \ldots, r_i$$

La tabla del ANOVA está dada por:

Causa de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios
Tratamientos	$t - 1$	$SC_{tratamientos}$	$CM_{tratamientos}$
Error	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	SC_{error}	CM_{error}

Total	$\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$		

Donde:

$$SC_{tratamientos} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r1}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t} r_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SC_{error} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r1}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r1}(Y_{ij} - \bar{Y}..)^2$$

Modelo del diseño completamente al azar

Consiste en escribir una ecuación matemática que permite determinar de manera teórica el valor de la respuesta observada (peso final). Siempre en un arreglo experimental bajo un DCA con un solo factor, la respuesta observada se puede modelar como:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Donde en la situación de estudio se tiene que:

$y_{ij} =$ El peso final obtenido al aplicar el $i - ésimo\ (i = 1,2,3,4.)$ tratamiento en el $j - ésimo\ (j = 1,2,3,4.)$

$\mu =$ La media global de incremento de peso de cualquier cordero sin importar el tratamiento aplicado

$\tau_i =$ Es el verdadero aporte del $i - ésimo$ tratamiento, definido como la diferencia entre la media del $i - ésimo$ tratamiento y la media global; esto es, $\tau_i = \mu_i - \mu$,

$\varepsilon_{ij} =$ La variable aleatoria error asociada a la $j - ésima$ unidad experimental del $i - ésimo$ tratamiento. Se supone que cumple con los supuestos:

- (i) Normalidad con media cero
- (ii) Independencia
- (iii) Homogeneidad de varianza

En términos del modelo las respuestas observadas se pueden expresar como

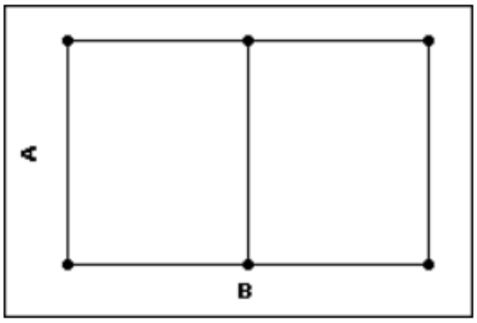
Tratamientos			
T1	**T2**	**T3**	**T4**
$47 = y_{11} = \mu + \tau_1$	$50 = y_{21} = \mu + \tau_2$	$57 = y_{31} = \mu + \tau_3$	$62 = y_{41} = \mu + \tau_4$
$52 = y_{12} = \mu + \tau_1$	$54 = y_{22} = \mu + \tau_2$	$53 = y_{32} = \mu + \tau_3$	$65 = y_{42} = \mu + \tau_4$
$50 = y_{13} = \mu + \tau_1$	$56 = y_{23} = \mu + \tau_2$	$54 = y_{33} = \mu + \tau_3$	$74 = y_{43} = \mu + \tau_4$
$51 = y_{14} = \mu + \tau_1$	$48 = y_{24} = \mu + \tau_2$	$57 = y_{34} = \mu + \tau_3$	$50 = y_{44} = \mu + \tau_4$

Se observa que todas las respuestas tienen un valor común μ y las respuestas que están en un mismo tratamiento tienen el mismo efecto, así las respuestas del tratamiento 1 tienen el mismo efecto (Muñoz, 2018).

5. DISEÑO FACTORIAL

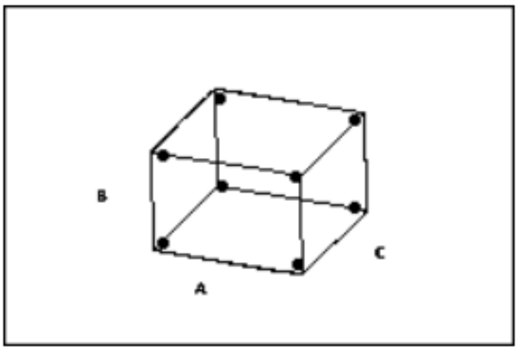
Un diseño factorial es un tipo de experimento diseñado que permite estudiar los efectos que varios factores pueden tener en una respuesta. Al realizar un experimento, variar los niveles de todos los factores al mismo tiempo en lugar de uno a la vez, permite estudiar las interacciones entre los factores.

En las siguientes gráficas, cada punto representa una combinación única de niveles de factores.



DISEÑO DE DOS FACTORES

- 2 niveles del factor A
- 3 niveles del factor B



DISEÑO DE TRES FACTORES

- 2 niveles de cada factor

NOTA

Cuando se tiene un diseño factorial con puntos centrales, puede probar si existe curvatura en la superficie de respuesta. Sin embargo, no se puede modelar el efecto de esa curvatura en ningún lugar, excepto en el punto central. En otras palabras, solo se puede calcular los valores ajustados en los puntos de vértice y el punto central del diseño, por lo que no puede crear una gráfica de contorno. Debe tener términos cuadráticos (por ejemplo, términos al cuadrado) en el modelo a fin de modelar la curvatura en toda la superficie de respuesta. Esto es posible con un diseño de superficie de respuesta. Usted puede ampliar el diseño factorial con puntos axiales para crear un diseño de superficie de respuesta central compuesto a partir de un diseño factorial.

5.1. Diseños Factoriales Completos

Un diseño factorial completo es un diseño en el cual los investigadores miden las respuestas para todas las combinaciones de niveles de los factores. Minitab ofrece dos tipos de diseños factoriales completos:

- Diseños factoriales completos de 2 niveles que solo contienen factores de 2 niveles.
- Diseños factoriales completos generales que contienen factores con más de dos niveles.

El número de corridas necesarias para un diseño factorial completo de 2 niveles es 2k, donde k es el número de factores. A medida que aumenta el número de factores incluidos en un diseño factorial de 2 niveles, el número de corridas necesarias para realizar un diseño factorial completo aumenta rápidamente. Por ejemplo, un diseño factorial completo de 2 niveles con 6 factores requiere 64 corridas, un diseño con 9 factores requiere 512 corridas. Un diseño factorial fraccionado de un medio requeriría solo la mitad de esas corridas.

5.2. Diseños Factoriales Fraccionados

Un diseño fraccionado es un diseño en el cual los investigadores solo realizan un subconjunto seleccionado o "fracción" de las corridas experimentales incluidas en el diseño factorial completo. Los diseños factoriales fraccionados son una opción adecuada cuando los recursos son limitados o el número de factores incluidos en el diseño es grande, porque utilizan menos corridas que los diseños factoriales completos.

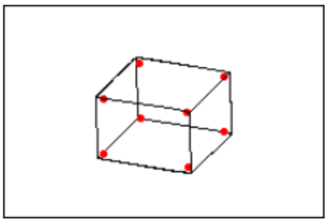
Un diseño factorial fraccionado utiliza un subconjunto de un diseño factorial completo, por lo que parte de los efectos principales y las interacciones de 2 factores se confunden y no se pueden separar de los efectos de otras interacciones de orden superior. Por lo general, los investigadores están dispuestos a presuponer que los efectos de orden superior son insignificantes para obtener información sobre los efectos principales y las interacciones de orden bajo con menos corridas.

5.3. Diseño Factorial Completo de 2 Niveles

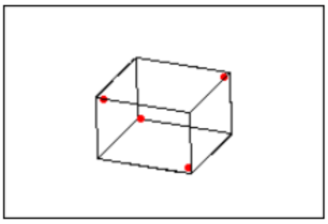
En un diseño factorial completo de 2 niveles, cada factor experimental tiene solo dos niveles. Las corridas experimentales incluyen todas las combinaciones de estos niveles de factores. Aunque los diseños factoriales de 2 niveles no pueden explorar completamente una amplia región del espacio de los factores, sí proporcionan información útil con un número relativamente reducido de corridas por factor. Puesto que los diseños factoriales de 2 niveles pueden identificar tendencias importantes, se pueden usar como punto de partida para realizar experimentos adicionales. Por ejemplo, cuando necesite explorar una región donde crea que puede existir una configuración óptima, podrá ampliar un diseño factorial para formar un diseño central compuesto.

COMPARACIÓN

Los siguientes diagramas muestran un diseño factorial completo en comparación con un diseño factorial fraccionado de ½



Diseño factorial completo



Diseño factorial fraccionado de ½

El diseño factorial completo contiene el doble de puntos de diseño que el diseño fraccionado de ½. La respuesta se mide solo en los cuatro de los ocho puntos de vértice posibles de la porción factorial del diseño. Sin embargo, con este diseño, los efectos principales se confundirán con las interacciones de 2 factores.

CÓMO ORDENA MINITAB LAS FRACCIONES DE UN DISEÑO

Las fracciones de un diseño se ordenan con base en los signos asignados a los generadores de diseño. Por ejemplo, consideremos un diseño de 6 factores y 8 corridas. Los generadores de diseño son D = AB, E = AC, F = BC. Esto es un 1/8 de un diseño completo de 6 factores. Por lo tanto, hay 8 fracciones. Estas se ordenan de la siguiente manera:

Fracción	Orden estándar (Yates)	Generador de diseño
1	– – –	D = –AB, E = –AC, F = –BC
2	+ – –	D = +AB, E = –AC, F = –BC
3	– + –	D = –AB, E = +AC, F = –BC
4	+ + –	D = +AB, E = +AC, F = –BC
5	– – +	D = –AB, E = –AC, F = +BC
6	+ – +	D = +AB, E = –AC, F = +BC
7	– + +	D = –AB, E = +AC, F = +BC
8	+ + +	D = +AB, E = +AC, F = +BC

La fracción principal siempre es la última, la que tiene todos los signos +.

Supongamos que creamos la segunda fracción. Comenzamos con el factorial completo de 3 factores y luego agregamos los factores D = AB, E = -AC, F = -BC, dando como resultado:

Corrida	A	B	C	D = AB	E = –AC	F = –BC
1	–	–	–	+	–	–
2	+	–	–	–	+	–
3	–	+	–	–	–	+
4	+	+	–	+	+	+
5	–	–	+	+	+	+
6	+	–	+	–	–	+
7	–	+	+	–	+	–
8	+	+	+	+	–	–

ELECCIÓN DE UNA FRACCIÓN QUE NO SEA LA PREDETERMINADA

Cuando usted crea un diseño factorial fraccionado, Minitab utiliza la fracción principal por opción predeterminada. La fracción principal es la fracción en la que todos los signos son positivos. Sin embargo, pudiera haber situaciones en las que un diseño contenga puntos cuya inclusión resultaría poco práctica y la elección de una fracción apropiada puede evitar estos puntos.

Un diseño factorial completo con 5 factores requiere 32 corridas. Si usted desea solo 8 corridas, necesita utilizar una fracción de un cuarto. Puede utilizar cualquiera de las cuatro fracciones posibles del diseño. Minitab enumera las corridas en orden estándar (también conocido como orden de Yates) utilizando los generadores de diseño de la manera siguiente:

D = –AB E = –AC

D = AB E = –AC

D = –AB E = AC

D = AB E = AC

Por ejemplo, supongamos que usted no pudo realizar el diseño con los cinco factores establecidos en su nivel alto. La fracción principal contiene este punto, pero la tercera fracción no.

3. ANÁLISIS DE LA VARIANZA DE UN FACTOR (ANOVA)

El análisis de la varianza permite contrastar la hipótesis nula de que las medias de K poblaciones (K >2) son iguales, frente a la hipótesis alternativa de que por lo menos una de las poblaciones difiere de las demás en cuanto a su valor esperado. Este contraste es fundamental en el análisis de resultados experimentales, en los que interesa comparar los resultados de K 'tratamientos' o 'factores' con respecto a la variable dependiente o de interés.

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_K = \mu$$
$$H_1:\ \exists \mu_j \neq \mu \quad j = 1, 2, \ldots, K$$

El Anova requiere el cumplimiento los siguientes supuestos:

- Las poblaciones (distribuciones de probabilidad de la variable dependiente correspondiente a cada factor) son normales.
- Las K muestras sobre las que se aplican los tratamientos son independientes.
- Las poblaciones tienen todas igual varianza (homoscedasticidad).

El ANOVA se basa en la descomposición de la variación total de los datos con respecto a la media global (SCT), que bajo el supuesto de que H0 es cierta es una estimación de σ^2 obtenida a partir de toda la información muestral, en dos partes:

- Variación dentro de las muestras (SCD) o Intra-grupos, cuantifica la dispersión de los valores de cada muestra con respecto a sus correspondientes medias.
- Variación entre muestras (SCE) o Inter-grupos, cuantifica la dispersión de las medias de las muestras con respecto a la media global.

Las expresiones para el cálculo de los elementos que intervienen en el Anova son las siguientes:

Media $\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{nj} x_{ij}}{n}$. Global:

Variación Total: $SCT=\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{nj} (x_{ij} - \overline{X})^2$

Variación Intra-grupos $SCD=\sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{nj} (x_{ij} - \overline{X_j})^2$

$$SCE=\sum_{j=1}^{K} (\overline{X_j} - \overline{X})^2 n_j$$

Variación Inter-grupos:

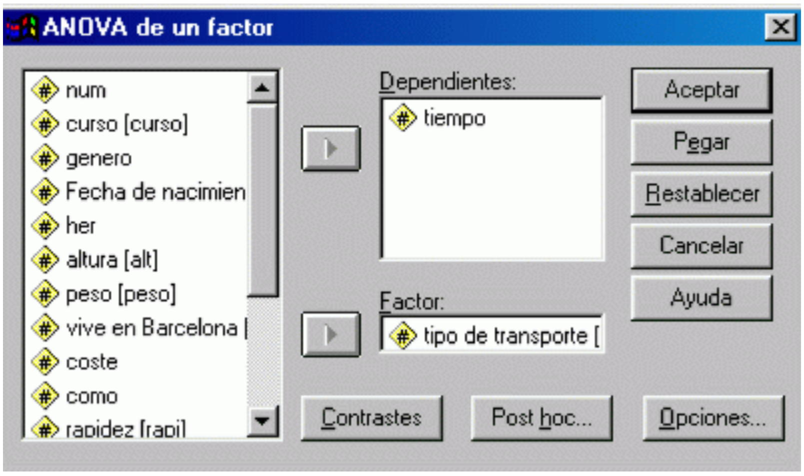
Siendo *xij* el i-ésimo valor de la muestra j-ésima; *nj* el tamaño de dicha muestra y $\overline{X}_j$ su media.

Cuando la hipótesis nula es cierta SCE/K-1 y SCD/n-K son dos estimadores insesgados de la varianza poblacional y el cociente entre ambos se distribuye según una F de Snedecor con K-1 grados de libertad en el numerador y N-K grados de libertad en el denominador. Por lo tanto, si H0 es cierta es de esperar que el cociente entre ambas estimaciones será aproximadamente igual a 1, de forma que se rechazará H0 si dicho cociente difiere significativamente de 1.

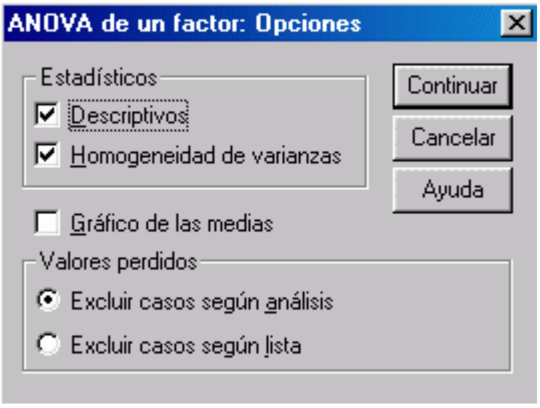
La secuencia para realizar un ANOVA es:

- Analizar
- Comparar medias
- ANOVA de un factor

Se abre el siguiente cuadro de diálogo:



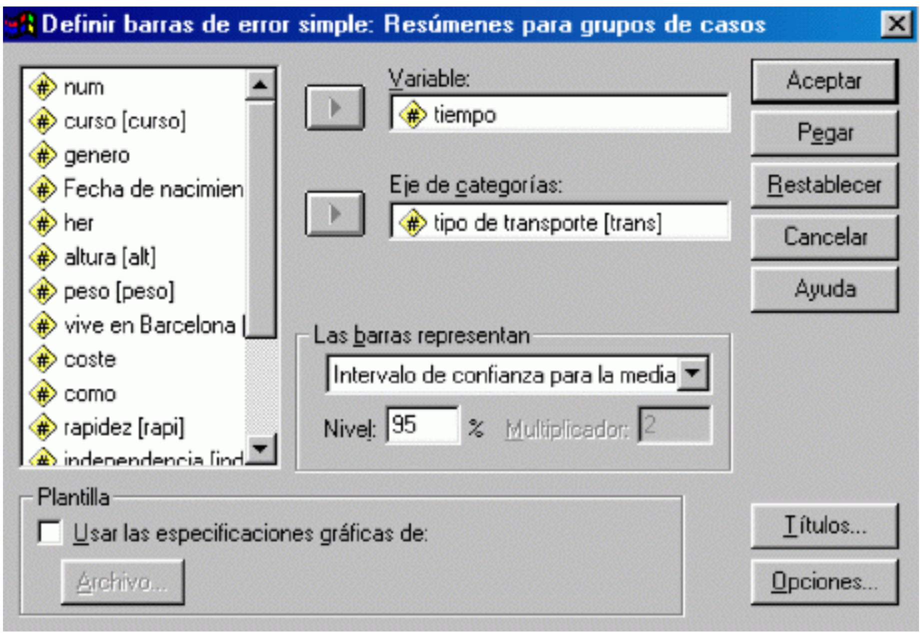
Se selecciona la variable que se considera *Dependiente* y la variable *Factor* y con el botón *Opciones* se activan *Estadísticos Descriptivos* y *Homogeneidad de varianzas.*



Al aceptar en el visor de resultados aparecen los siguientes cuadros:

- *Descriptivos.* Recoge la media, la desviación típica, el intervalo de confianza del 95% (por defecto) para la media correspondientes a la variable dependiente para cada uno de los grupos definidos por el factor.
- *Prueba de homogeneidad de varianzas*. Contiene el valor del estadístico de Levene del contraste de la hipótesis de homoscedasticidad con el nivel de significación crítico.
- *ANOVA*. Contiene las sumas de cuadrados inter-grupos, intra-grupos y total, sus correspondientes grados de libertad y el valor del estadístico de prueba F junto con el nivel de significación crítico.

Como complemento gráfico de este análisis, para obtener una primera aproximación acerca de si es razonable o no la hipótesis nula, se selecciona *Gráficos* > *Barras de error* y se activa la opción Simple. Con el botón *Definir* se abre el siguiente cuadro de diálogo:

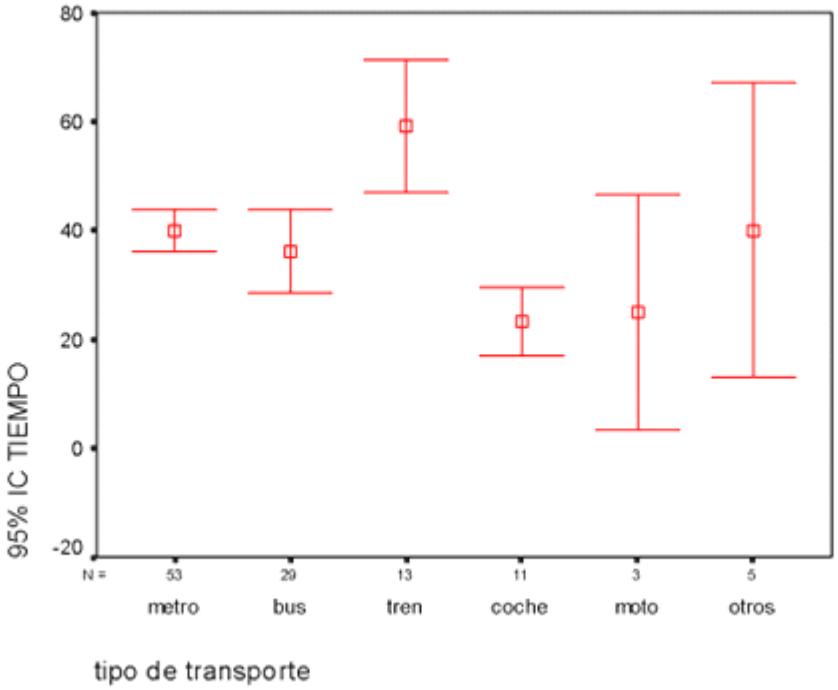


Se selecciona en *Variable* la variable dependiente del ANOVA y en el *Eje de categorías* la variable factor. El intervalo de confianza para la media se calcula por defecto al 95% de confianza. Al aceptar aparece en el visor de resultados los puntos que respresentan a la media de cada grupo junto con los límites del correspondiente intervalo de confianza para la media poblacional. Si los puntos que representan las medias están desigualmente distribuidos en el gráfico se tiene un indicio de que a nivel poblacional no puede sostenerse la hipótesis de igualdad de medias; es decir, por lo menos uno de los niveles del factor influye significativamente sobre la variable dependiente.

EJEMPLOS

Con los datos de la encuesta sobre transporte, Enctrans.sav, razonar si puede aceptarse que el tipo de transporte utilizado, Trans, influye sobre la variable tiempo.

Con la opción de menú *Gráficos* > *Barras de error* > *Simple* y con el botón *Definir* se selecciona como *Variable* Tiempo y en *Eje de categorías* la variable Trans; al aceptar se obtiene la siguiente representación gráfica:



Como puede observarse, los puntos que representan a las medias de cada grupo aparecen dispersos a diferentes niveles; sobre todo la media del grupo definido por el factor Tren. El intervalo de confianza para la media correspondiente al grupo definido por el factor Metro está contenido dentro del intervalo correspondiente al grupo definido por el factor Bus, así como, el intervalo correspondiente al factor Coche está contenido dentro de los intervalos correspondientes definidos por los factores Metro y Otros. El gráfico, por tanto, parece sugerir no una única población sino tres poblaciones con distintas medias.

Para realizar el análisis de la varianza propiamente dicho la secuencia es *Analizar > Comparar medias > ANOVA de un factor*. En el cuadro de diálogo se selecciona Tiempo como variable *Dependiente* y Trans como *Factor*. Para contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas se abre con el botón correspondiente el cuadro de diálogo *ANOVA de un factor*: *Opciones* y se activa *Homogeneidad de varianzas*. Si se desea un análisis descriptivo del comportamiento de la variable dependiente dentro de cada grupo se activa también la opción *Descriptivos*. Al aceptar se obtienen los siguientes cuadros de resultados:

Descriptivos

TIEMPO

	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
metro	53	39,94	14,20	1,95	36,03	43,86
bus	29	36,17	20,18	3,75	28,50	43,85
tren	13	59,15	20,33	5,64	46,87	71,44
coche	11	23,18	9,56	2,88	16,76	29,60
moto	3	25,00	8,66	5,00	3,49	46,51
otros	5	40,00	21,79	9,75	12,94	67,06
Total	114	39,17	18,51	1,73	35,73	42,60

Este cuadro contiene un análisis descriptivo de la variable dependiente por grupos, así como, los límites superior e inferior para la media de cada grupo al 95% de confianza.

Prueba de homogeneidad de varianzas

TIEMPO

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
1,514	5	108	,191

El estadístico de Levene toma un valor lo suficientemente pequeño para no rechazar la hipótesis de homocesdaticidad a los niveles de significación habituales.

ANOVA

TIEMPO

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	8901,537	5	1780,307	6,450	,000
Intra-grupos	29810,297	108	276,021		
Total	38711,833	113			

En el cuadro de resultados del ANOVA, el valor del estadístico de prueba, F=6,450, es significativamente distinto de 1 para cualquier nivel de significación y, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias y queda confirmada la primera impresión proporcionada por el gráfico de barras de error.

4. ANALISIS DE LA VARIANZA DE DOS FACTORES

El análisis de varianza de dos vías, también conocido como plan factorial con dos factores, sirve para estudiar la relación entre una variable dependiente cuantitativa y dos variables independientes cualitativas (factores) cada uno con varios niveles. El ANOVA de dos vías permite estudiar cómo influyen por si solos cada uno de los factores sobre la variable dependiente (modelo aditivo) así como la influencia de las combinaciones que se pueden dar entre ellas (modelo con interacción).

Supóngase que se quiere estudiar el efecto de un fármaco sobre la presión sanguínea (variable cuantitativa dependiente) dependiendo del sexo del paciente (niveles: hombre, mujer) y de la edad (niveles: niño, adulto, anciano).

El efecto simple de los factores consiste en estudiar cómo varía el efecto del fármaco dependiendo del sexo sin diferenciar por edades, así como estudiar cómo varia el efecto del fármaco dependiendo de la edad sin tener en cuenta el sexo.

El efecto de la interacción doble consiste en estudiar si la influencia de uno de los factores varía dependiendo de los niveles del otro factor. Es decir, si la influencia del factor sexo sobre la actividad del fármaco es distinta según la edad del paciente o lo que es lo mismo, si la actividad del fármaco para una determinada edad es distinta según si se es hombre o mujer.

5. ANÁLISIS DE LA VARIANZA ANOVA

Del mismo modo que la t de Student, la prueba ANOVA es una prueba paramétrica y como tal requiere una serie de supuestos para poder ser aplicada correctamente. Denominada ANOVA o análisis de la varianza, en realidad nos va a servir no solo para estudiar las dispersiones o varianzas de los grupos, sino para estudiar sus medias y la posibilidad de crear subconjuntos de grupos con medias iguales. Se puede decir que la prueba ANOVA es la generalización de la t de Student, ya que si realizamos una prueba ANOVA en la comparación de solo dos grupos, obtenemos los mismos resultados.

Al igual que la t de Student, se requiere que cada uno de los grupos a comparar tenga distribuciones normales, o lo que es más exacto, que lo sean sus residuales.

Los residuales son las diferencias entre cada valor y la media de su grupo. Además debemos estudiar la dispersión o varianzas de los grupos, es decir estudiar su homogeneidad. Cuando mayor sean los tamaños de los grupos, menos importante es asegurar estos dos supuestos, ya que el ANOVA suele ser una técnica bastante "robusta" comportándose bien respecto a transgresiones de la normalidad. No obstante, si tenemos grupos de tamaño inferior a 30, es importante estudiar la normalidad de los residuos para ver la conveniencia o no de utilizar el análisis de la varianza. Si no fuera posible utilizar directamente el ANOVA, podemos recurrir al uso de pruebas no paramétricas, como la de *Kruskal-Wallis*.

Como ya hemos dicho, el ANOVA es la generalización de la t de Student, y sus hipótesis nula y alternativa se pueden formular del siguiente modo:

· Hipótesis nula (H_o): $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

Las medias de los k grupos son iguales y por tanto las diferencias encontradas pueden explicarse por el azar. Dicho de otro modo, los grupos proceden de poblaciones con medias iguales.

· Hipótesis alternativa (H_1): al menos uno de los grupos tiene una media distinta del resto de grupos.

En la prueba ANOVA las comparaciones son siempre bilaterales (a dos colas) ya que estudiamos globalmente si los grupos tienen medias distintas, y no si un grupo tiene una media menor o mayor que otro por separado. Si se rechaza la hipótesis nula, no sabremos entre qué grupos están las diferencias.

Veamos un ejemplo. Se desean comparar las medias del índice de masa corporal (IMC) en un grupo de pacientes con EPOC, clasificados en función de su gravedad mediante su volumen espiratorio forzado en el primer segundo (FEV_1) obtenido por espirometría. Estos pacientes fueron clasificados como leves, moderados, graves y muy graves. Los resultados en un paquete estadístico como el SPSS aparecen en las tablas I, II y III. Los descriptivos de los pacientes incluidos en el estudio se muestran en la Tabla I.

Tabla I. Descriptivos del IMC por grupos de gravedad de EPOC.

	N	Media	DT	EEM	IC 95%	Mínimo	Máximo
Leve: FEV_1 >80%	29	26,9	4,43	0,82	(25,2 - 28,6)	18,1	39,3
Moderado: FEV_1 50-80%	77	28,8	4,70	0,54	(27,7 – 29,9)	18,8	45,0
Grave: FEV_1 30-50%	35	26,0	3,90	0,66	(24,7 – 27,4)	20,1	35,6
Muy Grave: FEV_1 <30%	43	25,8	4,75	0,72	(24,3 – 27,2)	17,6	38,7
Total	184	27,3	4,69	0,35	(26,6 – 27,9	17,6	45,0

DT: Desviación típica; EEM: Error estándar de la media; IC: intervalo de confianza.

Para saber si los grupos tienen medias iguales o no en su IMC, se ha de construir la tabla ANOVA. En muchos libros de estadística podemos encontrar como crear esta tabla a partir de de los datos de la muestra por lo que no creemos necesario explicar detalladamente los pasos a seguir para su construcción. Si nos interesa conocer en qué consiste y en qué nos basamos cuando decimos que los grupos tienen o no medias iguales.

La variabilidad o **varianza total** que podemos tener en nuestros datos se puede descomponer a su vez en:

–**Varianza entre grupos**. Mide la variabilidad entre las medias de cada grupo respecto a la media total de todas las observaciones. Denominada también como variabilidad o varianza *inter-grupos*.

–**Varianza dentro de los grupos**. Mide la variabilidad de cada observación respecto a la media de su grupo. Podemos encontrarla bajo el nombre de residual, error o varianza *intra-grupos*.

Resumiendo: **Varianza Total = Varianza entre grupos + varianza dentro de los grupos**

Del mismo modo que se hace en la t de Student y con otras pruebas estadísticas, se divide un efecto observado respecto a un error aleatorio. En nuestro caso se divide el efecto debido a la pertenencia de los grupos (varianza entre grupos) respecto a la dispersión debida al azar o error aleatorio (varianza dentro de los grupos). A este cociente se le denomina F, o F de Fisher-Snedecor. Si sobrepasa cierto valor crítico, entonces podremos afirmar que el efecto observado es demasiado grande para poder ser explicado por el azar (error aleatorio) y que por tanto no todos los grupos estudiados tienen la misma media.

Tabla II. Tabla ANOVA.

	Suma de cuadrados	**gl**	**Media cuadrática**	**F**	**p**
Inter-grupos	339	3	113	5,501	0,001
Intra-grupos	3693	180	21		
Total	4032	183			

gl: Grados de libertad; F: Estadístico F de Fisher-Snedecor.

El la Tabla II podemos ver el resultado de la tabla ANOVA que nos muestra el programa SPSS. Como vemos se ha descompuesto la variabilidad total en dos filas: suma de cuadrados inter-grupos (entre los distintos grupos) y suma de cuadrados intra-grupos (dentro de cada grupo). Después de tener las sumas de cuadrados inter e intra grupos, debemos dividirlas por sus correspondientes grados de libertad para de este modo tener sus varianzas.

La suma de cuadrados inter-grupos mide la dispersión de la media de cada grupo respecto de la media total (27,3 en el ejemplo). Como en nuestro ejemplo tenemos cuatro grupos, los grados de libertad son 3, se calculan como el número de grupos menos uno. Por tanto la varianza inter-grupos sería 339/3 que es igual a 113.

La suma de cuadrados intra-grupos mide la dispersión de cada observación respecto a la media de su grupo. Tenemos por tanto cuatro medias una para cada grupo. En nuestro ejemplo los grados de libertad se calculan como número de casos (184) menos número de grupos (4). Por tanto la varianza intra-grupos (también llamada varianza residual) es 3693/180 que es igual a 21 (Tabla II).

Una vez que tenemos calculadas las varianzas inter e intra grupos, sólo nos queda calcular el cociente entre ambas y comprobar si el efecto observado (numerador) es tan grande como para no poder ser explicado por el error aleatorio (denominador). El cociente de ambas varianzas se denomina F.

F=113/21; F=5,501 (Tabla II). El valor de la distribución F es conocido y está tabulado, si este estadístico de contraste supera cierto valor crítico, diremos que las diferencias son estadísticamente significativas.

En concreto, el valor de $F_{3,180}$ lleva una p asociada de 0,001. Por tanto rechazamos la hipótesis nula y concluimos que existe al menos un grupo cuya media es distinta a la media del resto de los grupos. Este valor de p asociado a F corresponde a una distribución F de 3 grados de libertad en el numerador y 180 en el denominador.

Comparaciones múltiples

Llegada a esta conclusión, el problema radica ahora en saber entre qué grupos se encuentran las diferencias. Como dijimos al principio, no es correcto aplicar una prueba como la t de Student para comparar todas las posibles combinaciones por parejas entre los grupos, ya que esto incrementa significativamente el error tipo I. El número de comparaciones posibles a realizar depende de cuántos grupos tengamos y se calcula del siguiente modo:

(k*(k-1))/2; siendo k el número de grupos que tenemos. En nuestro ejemplo con cuatro grupos tendríamos 6 posibles comparaciones.

Existen dos tipos de comparaciones: las planificadas previamente antes de iniciar la recogida de los datos, denominadas *a priori* y las realizadas con posterioridad y sin una planificación previa, construidas con todas las posibles combinaciones 2 a 2 denominadas *post hoc.* Aunque lo deseable son siempre las comparaciones *a priori*, esto no siempre es posible y con frecuencia se recurre en la práctica a compararlo todo con todo. En este caso se hace necesario *penalizar* de alguna manera el valor original de p en las comparaciones 2 a 2, para de este modo protegernos del denominado error tipo I.

Hay muchas formas de penalizar o ajustar estos valores de p en las comparaciones múltiples. La idea general que subyace es todos estos procedimientos es ser más exigentes con el valor estándar de $p<0,05$ en función del número de comparaciones realizadas para decir que las diferencias son estadísticamente significativas. Uno de los métodos más conocidos y utilizados en el ajuste de la p, es el de *Bonferroni*. Una aproximación muy buena para su cálculo consiste en multiplicar el valor original de p, por el número de comparaciones posibles a realizar. De este modo, si tenemos 10 posibles comparaciones, sólo serían significativas después de ajustar, aquellas diferencias cuya p original fuese aproximadamente menor de 0,005. Al utilizar la aproximación de multiplicar la p por el número de comparaciones, el valor de p no puede nunca superar el valor de 1 (hablamos de una probabilidad). Para el caso en el que esto suceda, debemos de poner 1 como el valor de p ajustado.

En realidad la forma exacta de calcular la p ajustada por el procedimiento de *Bonferroni* es la siguiente:

$p_{\text{ajustada}} = 1 - (1 - p_{\text{original}})^n$; siendo n el número de posibles comparaciones.

Existen otras muchas formas de penalizar la p, siendo unos métodos más conservadores que otros en función del número de comparaciones, homogeneidad de varianzas o desigualdad en los tamaños de los grupos. Actualmente existe mucha controversia sobre su uso y no hay un acuerdo universal sobre cuál es el que debe emplearse en cada momento, e incluso de si se debe o no realizar el ajuste del valor de p original. Tanto los procedimientos de *Bonferroni* como el de *Scheffé*, suelen ser bastante conservadores y se utilizan cuando no son muchas las comparaciones a realizar y además, los grupos son homogéneos en varianzas. En el caso de que las varianzas no sean homogéneas, se puede utilizar el método de *Tamhane*. Otros métodos menos conservadores son los de *Tukey* y *Student-Newman-Keuls* (S-N-K) para varianzas homogéneas.

Una prueba muy conservadora nos evitará cometer un error tipo I, es decir, al penalizar la p nos evitará equivocarnos al rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias ya que estamos siendo más exigentes, sin embargo, esto provoca un aumento del error tipo II. Es decir, diremos que no hay diferencias entre las medias de los grupos cuando en realidad sí que las hay.

En nuestro ejemplo en el que comparamos el IMC entre los distintos grupos de gravedad de EPOC, hemos realizado el ajuste de la p por el método de *Bonferroni* (Tabla III) adecuado para varianzas iguales, ya que la prueba de homogeneidad de varianzas (prueba de Levene) no fue significativa. Al tener cuatro grupos, tenemos 6 posibles comparaciones, siendo significativas después de ajustar la p, las comparaciones entre las medias de los grupos Moderado con Grave y Moderado con Muy grave.

Tabla III. Comparaciones de medias entre los 4 grupos con la corrección de Bonferroni.

I	J	Diferencia de medias (I-J)	EEDM	p	IC 95%
Leve	**Moderado**	-1,93	0,99	0,311	(-4,56;0,70)
	Grave	0,85	1,14	1,000	(-2,19;3,88)
	Muy grave	1,12	1,09	1,000	(-1,78; 4,02)
Moderado	**Grave**	2,78*	0,92	0,018	(0,31; 5,24)
	Muy grave	3,05*	0,86	0,003	(0,75; 5,35)
Grave	**Muy grave**	0,27	1,03	1,000	(-2,48; 3,02)

* La diferencia de medias es significativa al nivel 0,05. EEDM: Error estándar de la diferencia de medias. IC: intervalo de confianza.

Prueba de rangos con signo de Wilcoxon:

* Se utiliza para dos muestras pareadas y la variable de respuesta es ordinal o cuantitativa. Es la homóloga no paramétrica de la prueba paramétrica t para muestras pareadas.
  Hipótesis:

H_0: No hay diferencias entre las observaciones pareadas H_1: Sí hay diferencias entre las observaciones pareadas

Pueden plantearse hipótesis unilaterales.

Ejemplo: Se desea estudiar la efectividad de cierta dieta y para ello se toma una muestra aleatoria de 12 mujeres adultas en el grupo de edad de 35-40 años. Se toma el peso (peso en libras) antes de iniciar la prueba y al mes de encontrarse realizando la dieta. Los resultados se muestran a continuación:

Paciente	Peso antes	Peso después
1	186	175
2	147	148
3	128	125
4	176	178
5	212	203
6	158	158
7	204	197
8	157	160
9	189	181
10	149	151
11	191	187
12	200	195

Utilizar un $\alpha = 0,05$.

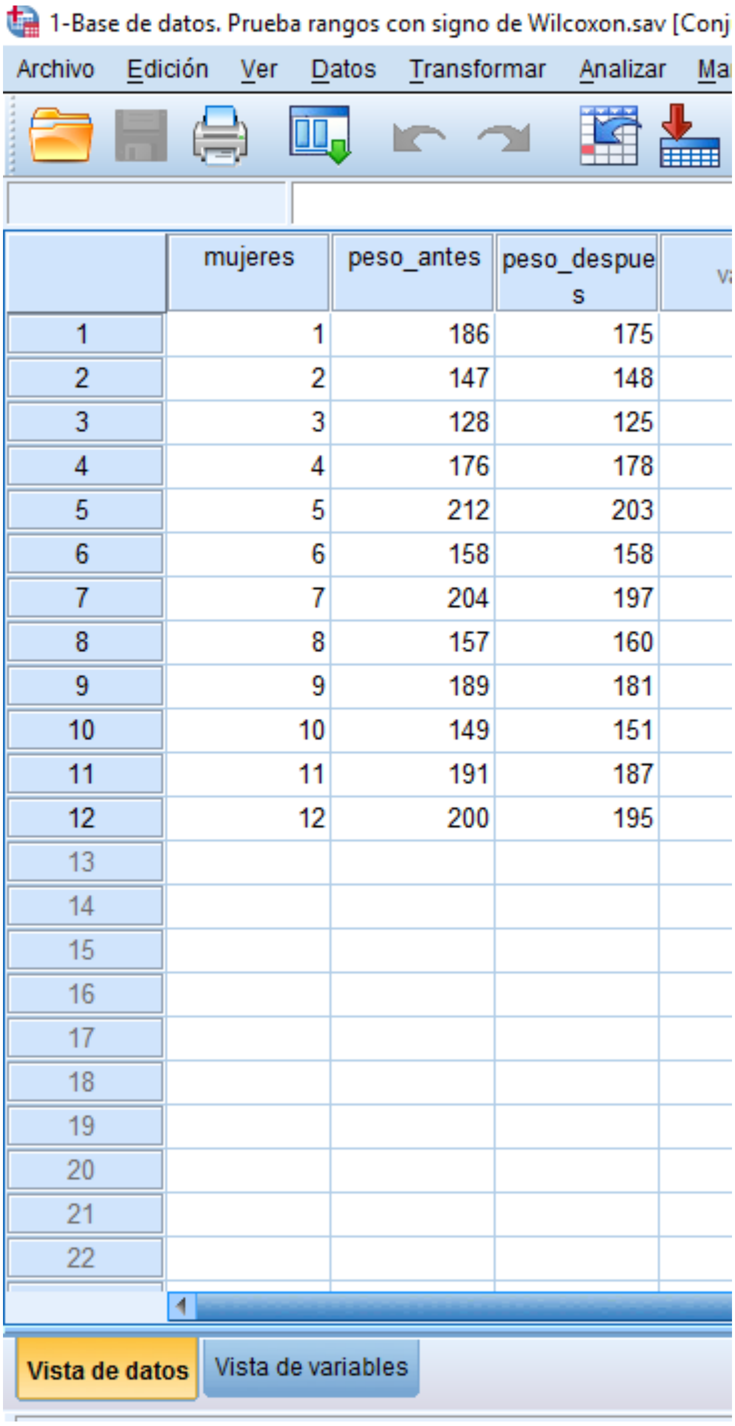
Respuesta:

Hipótesis:

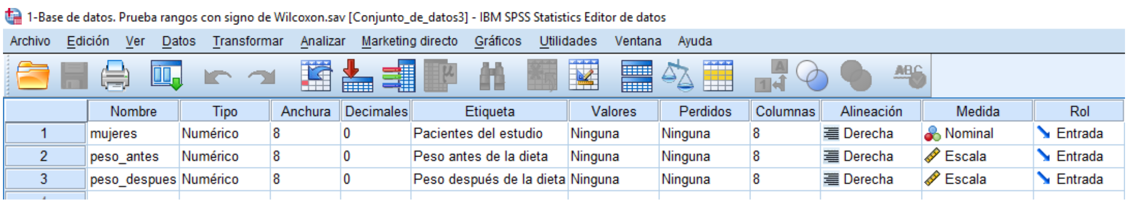
H_0: No hay diferencias entre el peso de las mujeres antes de iniciar la dieta y el peso unmes después.

H_1: El peso al mes de realizar la dieta es inferior al peso inicial.

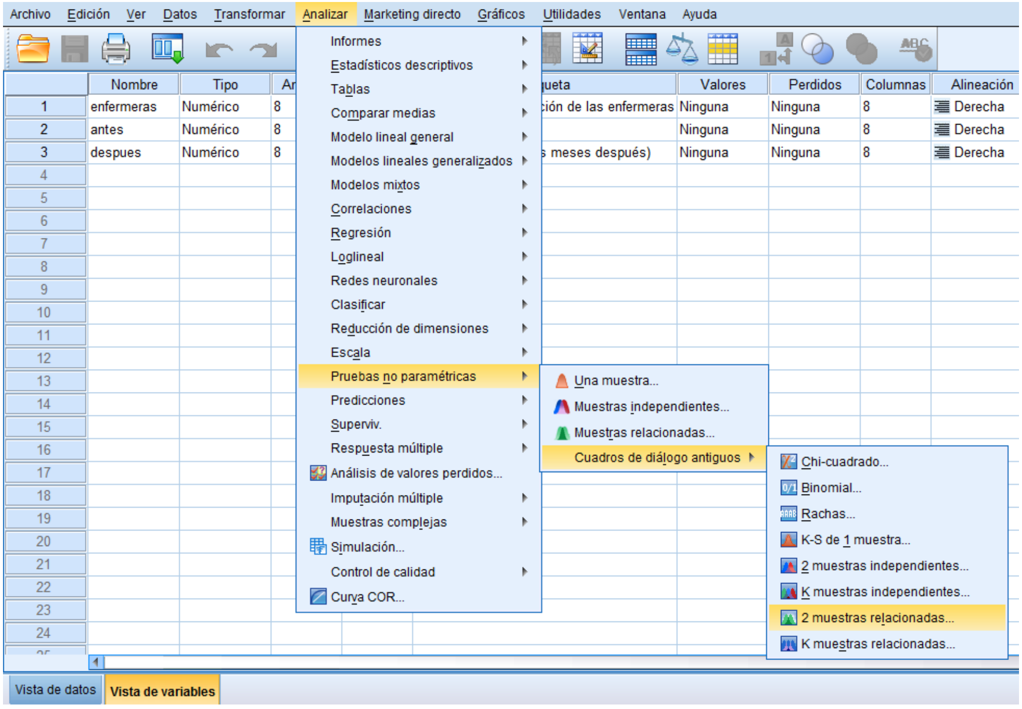
Se introducen así los datos en el programa SPSS en la Vista de datos:



Ahora vamos a la Vista de variables y deberá quedarles así:

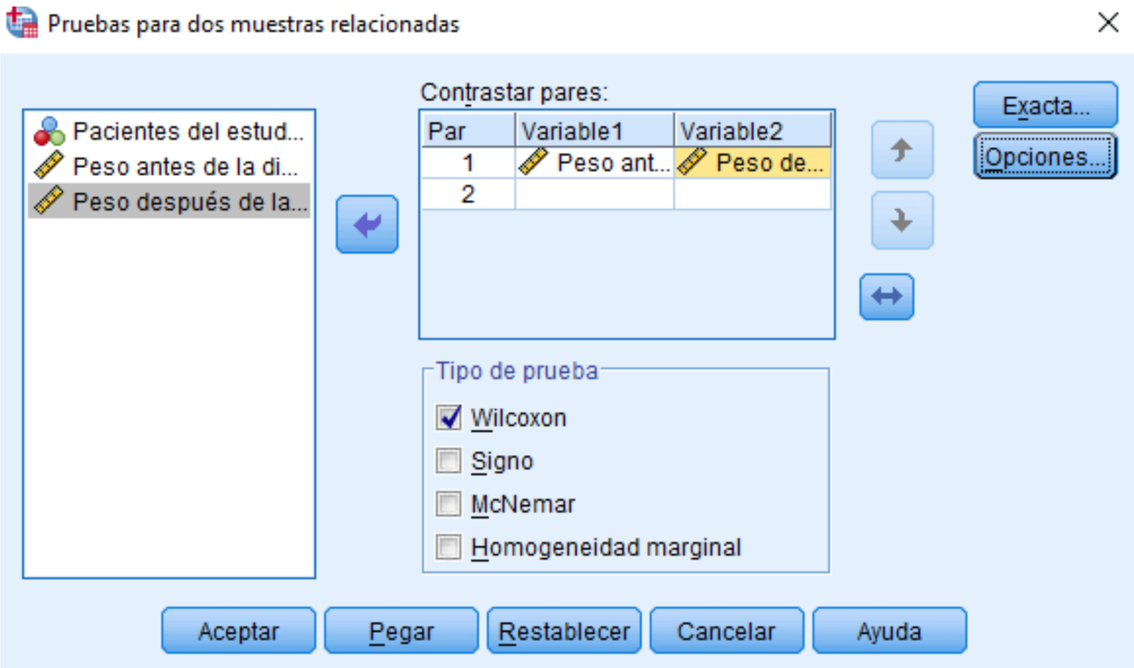


Luego se le indica lo siguiente al programa (vean lo que está destacado en amarillo quees lo que hay que dar clic):



Ahora sale el siguiente cuadro de diálogo:

Luego se hace lo siguiente: se pasa la variable Peso antes de la dieta (esta es la primera medición de cada paciente del estudio) para donde dice Variable 1 y luego se pasa la variable Peso después de la dieta (esta es la segunda medición de cada paciente del estudio, es la medición después de apicar la dieta) para donde dice Variable 2. Luego sedeja marcado el cuadrito que dice Wilcoxon. Deberá quedarles así:



Luego se dará clic en el botón Aceptar y saldrán los siguientes resultados:

Resultados:

Pruebas no paramétricas

[Conjunto_de_datos3] C:\Users\Silvia\Desktop\Manual de ejercicios de SPSS\Pruebas no paramétricas\1-Para variables cuantitativas\4-Dos muestras pareadas\2-Rangos con signos de Wilcoxon\1-Base de datos.

Prueba rangos con signo de Wilcoxon.sav

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Rangos

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Peso después de la dieta - Peso antes de la dieta	Rangos negativos	7[a]	7,93	55,50
	Rangos positivos	4[b]	2,63	10,50
	Empates	1[c]		
	Total	12		

a. Peso después de la dieta < Peso antes de la dieta

b. Peso después de la dieta > Peso antes de la dieta

c. Peso después de la dieta = Peso antes de la dieta

Estadísticos de contraste[a]

	Peso después de la dieta - Peso antes de la dieta
Z	-2,002[b]
Sig. asintót. (bilateral)	,045

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

b. Basado en los rangos positivos.

Interpretación: (los resultados a comentar los destaqué en las tablas en amarillo): En la tabla titulada "Rangos" vemos que se analizaron 12 pares (las 12 mujeres que se estudiaron). Hubo siete rangos negativos, cuatro positivos y un empate.

En la tabla titulada “Estadísticos de contrastes” se observa la fila Sig. asintót. (bilateral)y su valor de 0,045.

Podemos decir que, como el valor de p (Sig. asintót. (biateral)) es menor que 0,05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay evidencias suficientes para plantear que la dieta es efectiva en la reducción del peso con un nivel de significación del 5%.

Bibliografía

Becerra, A. (2019). *INTRODUCCIÓN A LA ESTIMULACIÓN PUNTUALES Y DE INTERVALOS.* Recuperado de http://www4.ujaen.es/~dmontoro/Metodos/Temas/Tema7.pdf

Cornejo, H. (2019). *PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA METODOS PARAMÉTRICOS.* Recuperado de file:///D:/Downloads/ESTAD%C3%8DSTICA%20Inferencial%20Manual/pruebas-paramc3a9tricas.pdf

Fernández, J. (2018). *ESTIMACIÓN MEDIANTE INTERVALOS ¨INFERENCIA ESTADÍSTICA¨.* Recuperado de https://www.uv.es/ceaces/pdf/intervalos.pdf

García, J., Reding, A, y López, J. (2013). *CÁLCULO DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MÉDICA*. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/iem/v2n8/v2n8a7.pdf

INEC (2019). *PRUEBAS DE SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA EN LA ENCUESTA NACIONAL DE EMPLEO, DESEMPLEO Y SUBEMPLEO (ENEMDU) EN MUESTRS DEPENDIENTES*. Recuperado de https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/web-inec/EMPLEO/2019/Septiembre/Pruebas_de_significancia_estadistica_ENEMDU.pdf

Mantilla, F. (2015). *TÉCNICAS DE MUESTREO: Un enfoque a la investigación de mercados*. Recuperado de file:///C:/Users/PC/Downloads/T%C3%A9cnicas%20de%20muestreo,%20.pdf

Molina, D. y Lara, A. (2016). *INTERVALOS DE CONFIANZA*. Recuperado de http://wpd.ugr.es/~bioestad/guia-de-r/practica-5/

Ordaz, J., Melgar, M. y Rubio, C. (s.f.). *MÉTODOS ESTADÍSTICOS Y ECONOMÉTRICOS EN LA EMPRESA Y PARA FINANZAS*. Recuperado de https://www.upo.es/export/portal/com/bin/portal/upo/profesores/jaordsan/profesor/1311101268463_mxtodos_estadxsticos_y_economxtricos_en_la_empresa_y_para_finanzas.pdf

Rocha, G. (2013). *TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL.* Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/CienciasAplicadas/ProbabilidadEstadistica/assets/Documentos/Teoremadellimitecentral.pdf

Rodríguez, L (2017). *FUNDAMENTOS DE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL.* Recuperado de:https://centrogeo.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1012/159/1/15-Estadistica%20Inferencial%20-%20%20Diplomado%20en%20An%C3%A1lisis%20de%20Informaci%C3%B3n%20Geoespacial.pdf

Rubio, G. (2017). *INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES*. Recuperado de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/ficheros/andaluciaccss/proporciones/07_propor_sol.pdf

Vicuña, R. (2016). *ESTIMACION PUNTUAL.* Recuperado de https://www.uv.es/ceaces/pdf/estipuntual.pdf

Zambrano, K. (2015). *PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS: REDACCIÓN Y EJERCICIOS SOLUTIONS.* Recuperado de file:///D:/Downloads/TesisPruebasEstadisticaMetdodsNoParametricos.pdf

Abellán, J. (2018). Teorema central del límite (TCL). Recuperado de economipedia.com

Ávila Baray, H. L. (2016). Introducción a la Metodología de la Investigación. Edición electrónica. Cuauhtémoc (Chihuahua), Instituto Tecnológico de Cd. Cuauhtémoc. Disponible en http://www.eumed.net/libros-gratis/2006c/203/index.htm

García, MJ. (2011). Distribución muestral de medias. Recuperado de http://www.itchihuahua.edu.mx/academic/industrial/estadistica1/cap01b.htm

Ochoa, C. (2015). Muestreo probabilístico o no probabilístico. Recuperado de https://www.netquest.com/blog/es/blog/es/muestreo-probabilistico-o-no-probabilistico-ii

Otzen, T. y Manterola, C. (2017). Técnicas de Muestreo sobre una Población a Estudio. Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/pdf/ijmorphol/v35n1/art37.pdf

Pickers, S. (2015). Determinación del tamaño de una muestra. PSYMA. Recuperado de https://www.psyma.com/company/news/message/como-determinar-el-tamano-de-una-muestra#:

Pita, S. (2018). Determinación del tamaño muestral. Unidad de Epidemiología Clínica y Bioestadística. Complexo Hospitalario Universitario de A Coruña.

Requena, B. (2014). Muestreo estratificado. Recuperado de https://www.universoformulas.com/estadistica/inferencia/muestreo-estratificado/

Requena, B. (2014). Muestreo por convenienci. Recuperado de https://www.universoformulas.com/estadistica/inferencia/muestreo-conveniencia/

Sánchez, M. (2016). Métodos de muestreo no probabilístico. Recuperado de https://prezi.com/ywzlttprvpgy/metodos-de-muestreo-no-probabilisticos/

Scharager, J. (2012). Muestreo no Probabilístico. Pontificia Universidad Católica de Chile. Sitio Web de Curso. Escuela de Estadística. Recuperado de https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/31715755/muestreo.pdf?1376397

INSTITUO POLITECTNICO DE MEXICO. (2010) Regresion y correlacion lineal. Virtual.sepi. Mexico.

http://www.virtual.sepi.upiicsa.ipn.mx/mdid/regrcorr.pdf

Gutiérrez, H y de la Vara, R. (2005) análisis y diseño experimentos. Segunda edición. Mcgraw-hill, méxico.

https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w19537w/analisis_y_diseno_experimentos.pdf

Cardona, D., Gonzales, K., Rivera, M y Cárdenas, E. (2013). Inferencia

Estadística módulo de regresión simple. Universidad del Rosario. Colombia.

Https://www.urosario.edu.co/administracion/documentos/documentos-de-investigacion/bi_147-web.pdf

Moral, I. (2006) modelos de regresión lineal simple y regresión logística.

Https://www.revistaseden.org/files/14-cap%2014.pdf

Pérez, J. (2014). La estadística: una orquesta hecha instrumento.

http://estadisticaorquestainstrumento.wordpress.com/

Benítez, C (2010) Análisis de la varianza en experimentos

Factoriales. Universidad nacional de Santiago esteros.

https://fcf.unse.edu.ar/archivos/series-didacticas/sd-21-estadistica.pdf

De la Fuente (2019) Análisis de la varianza universidad autónoma de

Madrid. España.

Https://www.estadistica.net/econometria/analisis-varianza/analisis-varianza.pdf

SALUD MADRID (2018) Modelos de análisis de varianza.

Http://www.hrc.es/bioest/anova_6.pdf

Ramón, G (2017) Correlación entre variables. Universidad de

Antioquia- colombia

http://viref.udea.edu.co/contenido/menu_alterno/apuntes/ac36-correlacion-variables.pdf

Uribe, J (2017) diseño de experimento con un solo factor. Blogspot.

Recuperado de:

http://doestatistics.blogspot.com/2017/02/diseno-de-experimento-con-un solofactor.html#:~:text=los%20experimentos%20con%20un%20solo,un %20producto%20o%20un%20resultado.

Medina, V y López, R. (2011) Análisis crítico del diseño factorial

2k sobre casos aplicados. Scientia et technica, vol. Xvii, núm. 47 pp. 101-106 universidad tecnológica de Pereira Pereira, Colombia.

Https://www.redalyc.org/pdf/849/84921327018.pdf

ISBN: 978-9942-619-06-8

SCAN ME

Tinta&Pluma
Editorial